Université de Cergy-Pontoise **2015-2016**
Approfondissements, S4.

Convexité.

Exercice 1. : Dire si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves. Soit $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f_2(x) = x^2$ si $x > 0$, $f_3(x) = x + 1$ si $x < -1$, $f_3(x) = 0$ si $x \in [-1; 1]$ et $f_3(x) = 1 - x$ si $x > 1$, $f_4(x) = x + 1$ si $x < -1$, $f_4(x) = x/2$ si $x \in [-1; 1]$ et $f_4(x) = 3x/2 - 1$ si $x > 1$.

Exercice 2. : Dire si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves. Soit $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = ax^2 + bx + c$, pour a, b, c fixés dans $\mathbb{R}$, $f_5(x) = e^x$, $f_6(x) = \cos x$.

Exercice 3. : Soit $\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 1/x$.

1. Montrer que φ est strictement convexe.
2. En utilisant le fait que, sur $[1; 2]$, φ est au-dessous de la corde liant les points $(1; \varphi(1))$ et $(2; \varphi(2))$, montrer que $\ln 2 < 1$.
3. En utilisant le fait que, sur $[1; 3] \setminus \{2\}$, φ est strictement au-dessus de sa tangente en 2, montrer que $\ln 3 > 1$.
4. En déduire que $e \in]2; 3[$.

Exercice 4. : Montrer que, pour $u > 0$, $v > 0$ et $t \in]0; 1[$, $u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$. Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $u = v$.

Exercice 5. : Soit I un intervalle borné de longueur strictement positive. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : Pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in I$, pour tout $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \; \leq \; \sum_{i=1}^n m_i f(x_i) \, .$$

Montrer par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que l'on a une inégalité similaire pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n) \in I$ et $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i > 0$.

Exercice 6. : Dans tout l'exercice, on considère deux réels $p > 1$ et $q > 0$ vérifiant $(1/p) + (1/q) = 1$. Pour $t > 0$, soit $f_t : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ définie par $f_t(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f_t(x) = x^t = e^{t \ln x}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in [0; +\infty[^n$ et $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Soit $\mu :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(t) \; = \; f_{1/t}\left(\sum_{i=1}^n m_i f_t(x_i)\right) \, .$$

1. Soit $t > 0$. Montrer que f_t est croissante. On remarque que $f_t \circ f_{1/t} = f_{1/t} \circ f_t = id$, où $id : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ est définie par $id(x) = x$.
2. Soit $t > 1$. Montrer que la restriction de f_t à $]0; +\infty[$ est convexe. Montrer que f_t est convexe.
3. Soit $t > 1$. En utilisant l'exercice 5, montrer que $\mu(t) \geq \mu(1)$.
4. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Soit

$$\lambda \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q} \;>\; 0\,.$$

   On choisit, pour tout $i \in \{1; \cdots, n\}$, $m_i = \lambda^{-q}|b_i|^q > 0$ et $x_i = m_i^{-1/p}|a_i| \geq 0$. Vérifier que $\sum_{i=1}^{n} m_i = 1$. Montrer (avec 3.) l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \;\leq\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q}. \tag{1}$$

5. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. L'inégalité (2) ci-dessous est vraie si, pour tout $i \in \{1; \cdots, n\}$, $b_i = 0$. On suppose que les b_i ne sont pas tous nuls. On note les termes non nuls $b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}$ avec $k \geq 1$. En appliquant l'inégalité (1), avec n remplacé par k, à des k-uples appropriés, montrer l'inégalité de Hölder suivante :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \;\leq\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big) \right) \cdot f_{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n} f_q\big(|b_i|\big) \right). \tag{2}$$

6. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. Appliquer l'inégalité (2) avec les a_i remplacés par $|a_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. Appliquer cette même inégalité avec les a_i remplacés par les $|b_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. En déduire l'inégalité de Minkowski suivante :

$$f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i + b_i|\big) \right) \;\leq\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big) \right) \,+\, f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|b_i|\big) \right). \tag{3}$$

7. Montrer que l'application $N_{n;p} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $y = (y_1, \cdots, y_n)$, par

$$N_{n;p}(y) \;=\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|y_i|\big) \right),$$

   est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
8. Ajout postérieur. Soit ℓ^p l'espace vectoriel des suites complexes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_p\big(|y_i|\big) \;<\; +\infty\,.$$

   Montrer que l'application $N_p : \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, par

$$N_p(a) \;=\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_p\big(|a_i|\big) \right),$$

   est une norme sur ℓ^p.

Exercice 7. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Quels sont les minima de f, ceux de la restriction de f à $[0;1]$, ceux de la restriction de f à $]0;1]$, ceux de la restriction de f à $[1;2]$?

Exercice 8. : Vrai ou faux. Justifier toute réponse. Dans tout l'exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et concave alors f est constante.
2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe alors f est croissante.
3. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et si J est un sous-intervalle de I alors f est convexe sur J.
4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est convexe sur I_1 et sur I_2 alors f est convexe sur $I_1 \cup I_2$.
5. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe alors f admet un minimum.
6. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et I est un segment, alors f admet un minimum.

Exercice 9. : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$. Pour $b \geq a$, soit $\varphi_b :]b;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_b(x) \;=\; \frac{f(x) - f(b)}{x - b}\ .$$

1. Soit $b \geq a$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} \varphi_b$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. On suppose qu'il existe $b \geq a$ tel que $\lim\limits_{+\infty} \varphi_b > 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
3. On suppose qu'il existe $b \geq a$ tel que $\lim\limits_{+\infty} \varphi_b < 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.
4. On suppose que, pour tout $b \geq a$, $\lim\limits_{+\infty} \varphi_b = 0$. Montrer que f est décroissante.
5. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$.
6. Soit $g : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -\sqrt{x}$. Montrer que g est convexe et que l'hypothèse de la question 4. est remplie pour $f = g$. Que vaut $\lim\limits_{+\infty} g$?

Exercice 10. : Soit I un intervalle borné de longueur strictement positive. Il est donc du type $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$, avec $a < b$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On étudie les limites de f en a et b. Lorsqu'elles existent, on note par

$$\lim_{b^-} f \;=\; \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f \quad \text{et} \quad \lim_{a^+} f \;=\; \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f$$

la limite à gauche en b et la limite à droite en a, respectivement, de f. Pour $d \in I$, soit $\varphi_d : I \setminus \{d\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_d(x) \;=\; \frac{f(x) - f(d)}{x - d}\ . \tag{4}$$

1. Montrer que $\lim\limits_{b^-} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

2. Montrer que $\lim\limits_{a^+} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
3. Montrer que, si $b \in I$, alors $\lim_{b^-} f \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{b^-} f \leq f(b)$.
4. Montrer que, si $a \in I$, alors $\lim_{a^+} f \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{a^+} f \leq f(a)$.
5. Montrer que la restriction de f à $]a; b[$ est continue.
6. Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in]a; b[$, $g(a) = \lim\limits_{a^+} f$ et $g(b) = \lim\limits_{b^-} f$. Elle est continue. Montrer qu'elle est convexe.
7. Donner une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que $\lim\limits_{b^-} f < f(b)$ et $\lim\limits_{a^+} f < f(a)$. En particulier, une telle fonction f n'est pas continue.

On remarque que, si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe (avec $a < b$), alors f est continue par morceaux dans le sens où f est continue sur $]a; b[$ (cf. 5.), $\lim\limits_{a^+} f \in \mathbb{R}$ (cf. 4.) et $\lim\limits_{b^-} f \in \mathbb{R}$ (cf. 3.).

Exercice 11. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que f admet un minimum local en a et un en b, avec $a < b$. Montrer que $f(a) = f(b)$. En déduire que la restriction de f à $[a; b]$ est constante.

Exercice 12. : Soit I un intervalle de longueur strictement positive. On pose $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a $a < b$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On s'intéresse au cas où f n'a pas de minimum. On note par h la restriction de f à $]a; b[$.

1. On suppose que h n'est pas injective. Soit $(x; y) \in]a; b[$ tel que $x < y$ et $f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$. Soit h_1 la restriction de f (de h) à $[x; y]$.
   a). Montrer qu'il existe $c \in [x; y]$ tel que h_1 y est minimale.
   b). En déduire que f admet un minimum local dans $]x; y[$.
   c). Conclure que f a un minimum.
2. Déduire de ce qui précède que, si f n'a pas de minimum, alors h est strictement monotone.
3. Donner une fonction f sans minimum qui n'est pas strictement monotone.

Exercice 13. : Soit I un intervalle de longueur strictement positive. On pose $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a $a < b$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On s'intéresse aux éventuels maxima locaux de f. On pourra utiliser les fonctions φ_d définies dans (4) (cf. exercice 10).

1. Soit $m \in]a; b[$ tel qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(m) = \sup\{f(x); x \in [m - \delta; m + \delta] \cap I\}$. Montrer que f est constante (égale à $f(m)$) sur $[m - \delta; m + \delta] \cap I$. (Indication : on pourra utiliser φ_m). En particulier, si la propriété précédente est vraie pour tout $\delta > 0$ (i.e. si m est un maximum global), alors f est constante.
2. Dans toute la suite, on suppose que f n'est constante sur aucun sous-intervalle de I de longueur strictement positive.
   a). On suppose que f admet un maximum local en $m \in I$. Montrer qu'alors l'ensemble $\{a; b\} \cap I$ est non vide (c'est-à-dire qu'au moins l'une des bornes de I est finie et appartient à I) et que $m \in \{a; b\} \cap I$.

b). Montrer que si $I =]a;b[$ alors f n'a pas de maximum local.
c). On suppose que $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$. Donner une fonction f sans maximum local. Donner une fonction f avec un maximum global. Donner une fonction f avec un maximum local qui n'est pas global.
d). On suppose que $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Donner une fonction f sans maximum local. Donner une fonction f avec un maximum global. Donner une fonction f avec un maximum local qui n'est pas global.
e). On suppose désormais que $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application g définie au 6. de l'exercice 10, qui est continue et convexe. Montrer que g a un maximum global. Montrer que la valeur maximale de g est $\max(g(a);g(b))$. En déduire que f a aussi un maximum global et que sa valeur maximale est $\max(f(a);f(b))$.
f). D'après l'exercice 10, $\lim\limits_{a^+} f$ et $\lim\limits_{b^-} f$ existent dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{a^+} f < f(a)$ (resp. $\lim\limits_{b^-} f < f(b)$) alors a (resp. b) est un maximum local de f.

Exercice 14. : Transformation de Legendre.

I. Soit $f :]a;b[\longrightarrow]c;d[$ strictement croissante, dérivable et surjective, avec $a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On rappelle que f est en fait bijective et que sa bijection réciproque, notée $f^{\langle -1 \rangle}$, est strictement croissante et dérivable.

1. Soit F une primitive de f. On note que F est strictement convexe.
   i. Soit $p \in]c;d[$. Étudier les variations de $]a;b[\ni x \mapsto xp - F(x)$. En déduire que

$$G(p) \;:=\; \sup_{x \in]a;b[} \big(xp \;-\; F(x)\big) \;\in\; \mathbb{R}\,.$$

   La fonction $G :]c;d[\longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi construite est la transformée de Legendre de F.
   ii. Vérifier que, pour $p \in]c;d[$,

$$G(p) \;=\; p f^{\langle -1 \rangle}(p) \;-\; F\big(f^{\langle -1 \rangle}(p)\big)\,.$$

   ii. Vérifier que, pour $p \in]c;d[$, $G'(p) = f^{\langle -1 \rangle}(p)$. En particulier, G est strictement convexe.
2. G étant la fonction du I.1.a., montrer l'existence et calculer, pour $x \in]a;b[$,

$$H(x) \;:=\; \sup_{p \in]c;d[} \big(xp \;-\; G(p)\big)\,.$$

3. Montrer que, pour tout $x \in]a;b[$ et tout $p \in]c;d[$, $xp \leq G(p) + F(x)$.

II. Dans les cas suivants, choisir une primitive F de f, déterminer G, la transformée de Legendre de F, et appliquer le I.3.

1. $f = f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x$.
2. $f = f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$ définie par $f_2(x) = e^x$.
3. $f = f_3 :]0;+\infty[\longrightarrow]0;+\infty[$ définie par $f_3(x) = (1+\alpha)x^{1+\alpha}$, avec $\alpha > 0$.
4. $f = f_4 :]0;\pi/2[\longrightarrow]1;+\infty[$ définie par $f_4(x) = 1 + (\tan x)^2$.