Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Approfondissements, S4.

Convexité.

Exercice 1. : Dire si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves. Soit $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f_2(x) = x^2$ si $x > 0$, $f_3(x) = x + 1$ si $x < -1$, $f_3(x) = 0$ si $x \in [-1; 1]$ et $f_3(x) = 1 - x$ si $x > 1$, $f_4(x) = x + 1$ si $x < -1$, $f_4(x) = x/2$ si $x \in [-1; 1]$ et $f_4(x) = 3x/2 - 1$ si $x > 1$.

Exercice 2. : Dire si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves. Soit $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = ax^2 + bx + c$, pour a, b, c fixés dans $\mathbb{R}$, $f_5(x) = e^x$, $f_6(x) = \cos x$.

Exercice 3. : Soit $\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 1/x$.

1. Montrer que φ est strictement convexe.
2. En utilisant le fait que, sur $[1; 2]$, φ est au-dessous de la corde liant les points $(1; \varphi(1))$ et $(2; \varphi(2))$, montrer que $\ln 2 < 1$.
3. En utilisant le fait que, sur $[1; 3] \setminus \{2\}$, φ est strictement au-dessus de sa tangente en 2, montrer que $\ln 3 > 1$.
4. En déduire que $e \in]2; 3[$.

Exercice 4. : Montrer que, pour $u > 0$, $v > 0$ et $t \in]0; 1[$, $u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$. Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $u = v$.

Exercice 5. : Soit I un intervalle de longueur strictement positive et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : Pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in I$, pour tout $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \;\leq\; \sum_{i=1}^n m_i f(x_i)\,.$$

Montrer par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n) \in I$ et $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $m := \sum_{i=1}^n m_i > 0$, on a

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \;\leq\; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i f(x_i)\,.$$

Exercice 6. : On rappelle que, pour $a > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, on définit $a^\gamma = e^{\gamma \ln a}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1; \cdots; a_n) \in]0; +\infty[^n$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n a_k^{1/n} \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\,.$$

(Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme et l'exercice 5.)
Remarque : On constate que l'inégalité précédente est encore vraie si les a_k sont positifs ou nuls en posant par convention que $0^{1/n} = 0$. Le membre de gauche de l'inégalité est appelé moyenne géométrique des nombres $a_1, \cdots, a_n$. Le membre de droite est appelé moyenne arithmétique des nombres $a_1, \cdots, a_n$. L'exercice montre donc que la moyenne arithmétique est toujours plus grande que la moyenne géométrique.

Exercice 7. : Dans tout l'exercice, on considère deux réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $(1/p) + (1/q) = 1$. Pour $t > 0$, soit $f_t : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ définie par $f_t(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f_t(x) = x^t = e^{t \ln x}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in [0; +\infty[^n$ et $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Soit $\mu :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(t) \;=\; f_{1/t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i f_t(x_i)\right).$$

1. Soit $t > 0$. Montrer que f_t est croissante. Vérifier que, si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $f_t(xy) = f_t(x) f_t(y)$.
   On remarque que $f_t \circ f_{1/t} = f_{1/t} \circ f_t = id$, où $id : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ est définie par $id(x) = x$.
2. Soit $t > 1$. Montrer que la restriction de f_t à $]0; +\infty[$ est convexe. Montrer que f_t est convexe.
3. Soit $t > 1$. En utilisant l'exercice 5, montrer que $\mu(t) \geq \mu(1)$.
4. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Soit

   $$\lambda \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q} \;>\; 0\,.$$

   On choisit, pour tout $i \in \{1; \cdots, n\}$, $m_i = \lambda^{-q} |b_i|^q > 0$ et $x_i = m_i^{-1/p} |a_i| \geq 0$. Vérifier que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Montrer (avec 3.) l'inégalité suivante :

   $$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \;\leq\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}. \tag{1}$$

5. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. L'inégalité (2) ci-dessous est vraie si, pour tout $i \in \{1; \cdots, n\}$, $b_i = 0$. On suppose que les b_i ne sont pas tous nuls. On note les termes non nuls $b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}$ avec $k \geq 1$. En appliquant l'inégalité (1), avec n remplacé par k, à des k-uples appropriés, montrer l'inégalité de Hölder suivante :

   $$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \;\leq\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big)\right) \cdot f_{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n} f_q\big(|b_i|\big)\right). \tag{2}$$

6. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. Appliquer l'inégalité (2) avec les a_i replacés par $|a_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. Appliquer cette même inégalité avec les a_i remplacés par les $|b_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. En déduire l'inégalité de Minkowski suivante :

   $$f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i + b_i|\big)\right) \;\leq\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big)\right) + f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|b_i|\big)\right). \tag{3}$$

7. Montrer que l'application $N_{n;p} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $y = (y_1, \cdots, y_n)$, par

$$N_{n;p}(y) \;=\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|y_i|\big)\right),$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

8. Soit ℓ^p l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_p\big(|a_i|\big) \;<\; +\infty .$$

Montrer que ℓ^p est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_p : \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, par

$$N_p(a) \;=\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_p\big(|a_i|\big)\right),$$

est une norme sur ℓ^p.

9. Montrer que l'inégalité de Hölder (2) est encore valable en remplaçant p par 1 et le facteur dépendant de q par

$$\sup_{1\le i\le n} |b_i| .$$

10. Montrer directement (sans passer par l'inégalité de Hölder comme au 6.) que l'inégalité de Minkowski (3) est encore valable lorsque p est remplacé par 1.

11. En déduire que les applications $N_{n;1}, N_{n;\infty} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies, pour $y = (y_1, \cdots, y_n)$, respectivement par

$$N_{n;1}(y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} |y_i| \quad \text{et} \quad N_{n;\infty}(y) \;=\; \sup_{1\le i\le n} |y_i| ,$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

12. Soit ℓ^1 l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \;<\; +\infty .$$

Montrer que ℓ^1 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_1 : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, par

$$N_1(a) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| ,$$

est une norme sur ℓ^1.

13. Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \;<\; +\infty .$$

Montrer que ℓ^∞ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_\infty : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, par

$$N_\infty(a) \;=\; \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \,,$$

est une norme sur ℓ^∞.

Exercice 8. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Quels sont les minima de f, ceux de la restriction de f à $[0;1]$, ceux de la restriction de f à $]0;1]$, ceux de la restriction de f à $[1;2]$? Justifier toute réponse.

Exercice 9. : Vrai ou faux ? Justifier toute réponse. Dans tout l'exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et concave alors f est constante.
2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe alors f est croissante.
3. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et si J est un sous-intervalle de I alors f est convexe sur J.
4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est convexe sur I_1 et sur I_2 alors f est convexe sur $I_1 \cup I_2$.
5. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe alors f admet un minimum.
6. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et I est un segment, alors f admet un minimum.

Exercice 10. : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$. Pour $b \geq a$, soit $\varphi_b :]b;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_b(x) \;=\; \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \,.$$

1. Soit $b \geq a$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} \varphi_b$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. On suppose qu'il existe $b \geq a$ tel que $\lim\limits_{+\infty} \varphi_b > 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
3. On suppose qu'il existe $b \geq a$ tel que $\lim\limits_{+\infty} \varphi_b < 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.
4. On suppose que, pour tout $b \geq a$, $\lim\limits_{+\infty} \varphi_b = 0$. Montrer que f est décroissante.
5. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$.
6. Soit $g : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -\sqrt{x}$. Montrer que g est convexe et que l'hypothèse de la question 4. est remplie pour $f = g$. Que vaut $\lim\limits_{+\infty} g$?

Exercice 11. : Soit I un intervalle borné de longueur strictement positive. Il est donc du type $[a;b]$, $[a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$, avec $a < b$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On étudie les limites de f en a et b. Lorsqu'elles existent, on note par

$$\lim_{b^-} f \;=\; \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f \quad \text{et} \quad \lim_{a^+} f \;=\; \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f$$

la limite à gauche en b et la limite à droite en a, respectivement, de f. Pour $d \in I$, soit $\varphi_d : I \setminus \{d\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_d(x) \;=\; \frac{f(x)-f(d)}{x-d} \,. \tag{4}$$

1. Montrer que $\lim_{b^-} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Montrer que $\lim_{a^+} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
3. Montrer que, si $b \in I$, alors $\lim_{b^-} f \in \mathbb{R}$ et $\lim_{b^-} f \leq f(b)$.
4. Montrer que, si $a \in I$, alors $\lim_{a^+} f \in \mathbb{R}$ et $\lim_{a^+} f \leq f(a)$.
5. Montrer que la restriction de f à $]a; b[$ est continue.
6. On suppose que $I = [a; b]$. Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in]a; b[$, $g(a) = \lim_{a^+} f$ et $g(b) = \lim_{b^-} f$. Elle est continue. Montrer qu'elle est convexe.
7. Donner une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que $\lim_{b^-} f < f(b)$ et $\lim_{a^+} f < f(a)$. En particulier, une telle fonction f n'est pas continue.

On remarque que, si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors f est continue par morceaux dans le sens où f est continue sur $]a; b[$ (cf. 5.), $\lim_{a^+} f \in \mathbb{R}$ (cf. 4.) et $\lim_{b^-} f \in \mathbb{R}$ (cf. 3.).

Exercice 12. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur stritement positive. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que f est convexe (sur I) si

$$\forall (a; b) \in I^2;\ a < b\ ,\ \forall t \in [0; 1]\ ,\ f\big(ta + (1-t)b\big) \ \leq\ tf(a) + (1-t)f(b)\ . \tag{5}$$

1. Montrer que si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont convexes alors $f + g$ est aussi convexe.
2. Donner un exemple de fonctions convexes $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f - g$ n'est ni convexe ni concave sur I.
3. Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. On définit une fonction $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $h(x) = \max(f(x); g(x))$. On note $h = \max(f; g)$. Montrer que h est convexe.
4. Appliquer le 3 pour montrer la convexité des fonctions f_1 et $-f_3$ de l'exercice 1.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Cela signifie que, pour tout $x \in I$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $f(x)$. Montrer que f est convexe sur I.
6. Montrer que la fonction $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$ est convexe. (Indication : on pourra montrer que f est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0; 1]$ par $f_n(x) = x^n$ et appliquer le 5.)

Exercice 13. : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $g :]a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\lim_a g$ et $\lim_b g$ existent dans $\mathbb{R}$. Soit $\bar{g}$ un prolongement de g à $[a; b]$. On note par $\bar{g}_0$ le prolongement de g tel que $\bar{g}_0(a) = \lim_a g$ et $\bar{g}_0(b) = \lim_b g$. D'après le 6 de l'exercice 11, $\bar{g}_0$ est convexe. L'objectif de l'exercice est de montrer que $\bar{g}$ est convexe si et seulement si $\bar{g}(a) \geq \lim_a g$ et $\bar{g}(b) \geq \lim_b g$.

1. On suppose que $\bar{g}$ est convexe. En utilisant l'exercice 11, montrer que $\bar{g}(a) \geq \lim_a g$ et $\bar{g}(b) \geq \lim_b g$.

2. On suppose que $\bar{g}(a) \geq \lim_a g$ et $\bar{g}(b) \geq \lim_b g$. Montrer que, pour tout $c \in [a;b]$, l'application $\varphi_c : [a;b] \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\varphi_c(t) \;=\; \frac{\bar{g}(t) - \bar{g}(c)}{t - c}\,,$$

est croissante. En déduire que $\bar{g}$ est convexe.

3. On va retrouver le résultat du 2 d'une autre manière dans le cas où $\bar{g}(a) > \lim_a g$ et $\bar{g}(b) > \lim_b g$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$a_n \;=\; a + \frac{b-a}{n+1}\,,\, b_n \;=\; b - \frac{b-a}{n+1}\,,$$

et soit $f_n, h_n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) \;=\; \bar{g}(a) + \frac{g(a_n) - \bar{g}(a)}{a_n - a}\,(x-a)\,,$$

$$h_n(x) \;=\; \bar{g}(b) + \frac{\bar{g}(b) - g(b_n)}{b - b_n}\,(x-b)\,.$$

Vérifier que f_n et h_n sont convexes sur $[a;b]$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = f_n(x)$ si $x \in [a;a_n]$, $g_n(x) = g(x)$ si $x \in]a_n;b_n[$ et $g_n(x) = h_n(x)$ si $x \in [b_n;b]$. Montrer que $g_n = \max(f_n;h_n;\bar{g}_0)$. En déduire que g_n est convexe. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 12.) Vérifier que, pour tout $x \in [a;b]$, la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\bar{g}(x)$.

5. Déduire du 4 que $\bar{g}$ est convexe. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 12.)

Exercice 14. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe telle que f admet un minimum local en a et un en b, avec $a < b$. Montrer que $f(a) = f(b)$. En déduire que la restriction de f à $[a;b]$ est constante.

Exercice 15. : Soit I un intervalle de longueur strictement positive. On pose $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a $a < b$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On s'intéresse au cas où f n'a pas de minimum. On note par h la restriction de f à $]a;b[$.

1. On suppose que h n'est pas injective. Soit $(x;y) \in]a;b[$ tel que $x < y$ et $f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$. Soit h_1 la restriction de f (de h) à $[x;y]$.
   a). Montrer qu'il existe $c \in [x;y]$ tel que h_1 y est minimale.
   b). En déduire que f admet un minimum local dans $]x;y[$.
   c). Conclure que f a un minimum.

2. Déduire de ce qui précède que, si f n'a pas de minimum, alors h est strictement monotone.

3. Donner une fonction convexe f sans minimum qui n'est pas strictement monotone.

Exercice 16. : Soit I un intervalle de longueur strictement positive. On pose $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On a $a < b$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On s'intéresse aux éventuels maxima locaux de f. On pourra utiliser les fonctions φ_d définies dans (4) (cf. exercice 11).

1. Soit $m \in]a;b[$ tel qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(m) = \sup\{f(x); x \in [m-\delta; m+\delta] \cap I\}$. Montrer que f est constante (égale à $f(m)$) sur $[m-\delta; m+\delta] \cap I$. (Indication : on pourra utiliser φ_m). En particulier, si la propriété précédente est vraie pour tout $\delta > 0$ (i.e. si m est un maximum global), alors f est constante.
2. Dans toute la suite, on suppose que f n'est constante sur aucun sous-intervalle de I de longueur strictement positive.
   a). On suppose que f admet un maximum local en $m \in I$. Montrer qu'alors l'ensemble $\{a; b\} \cap I$ est non vide (c'est-à-dire qu'au moins l'une des bornes de I est finie et appartient à I) et que $m \in \{a; b\} \cap I$.
   b). Montrer que si $I =]a;b[$ alors f n'a pas de maximum local.
   c). On suppose que $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$. Donner une fonction f sans maximum local. Donner une fonction f avec un maximum global. Donner une fonction f avec un maximum local qui n'est pas global.
   d). On suppose que $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Donner une fonction f sans maximum local. Donner une fonction f avec un maximum global. Donner une fonction f avec un maximum local qui n'est pas global.
   e). On suppose désormais que $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $I = [a; b]$. On considère l'application g définie au 6. de l'exercice 11, qui est continue et convexe. Montrer que g a un maximum global. Montrer que la valeur maximale de g est $\max(g(a); g(b))$. En déduire que f a aussi un maximum global et que sa valeur maximale est $\max(f(a); f(b))$.
   f). D'après l'exercice 11, $\lim\limits_{a^+} f$ et $\lim\limits_{b^-} f$ existent dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{a^+} f < f(a)$ (resp. $\lim\limits_{b^-} f < f(b)$) alors a (resp. b) est un maximum local de f.

Exercice 17. : Transformation de Legendre.

I. Soit $f\ :]a;b[\longrightarrow]c;d[$ strictement croissante, dérivable et surjective, avec $a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On rappelle que f est en fait bijective et que sa bijection réciproque, notée $f^{\langle -1 \rangle}$, est strictement croissante et dérivable.

1. Soit F une primitive de f. On note que F est strictement convexe, puisque sa dérivée (f) est strictement croissante.
   i. Soit $p \in]c;d[$. Étudier les variations de $]a;b[\ni x \mapsto xp - F(x)$ et montrer que
   $$G(p) \ := \ \sup_{x \in]a;b[} \big(xp \ - \ F(x) \big) \ \in \ \mathbb{R}$$
   et que
   $$G(p) \ = \ pf^{\langle -1 \rangle}(p) \ - \ F\big(f^{\langle -1 \rangle}(p) \big) \,.$$
   La fonction $G\ :]c;d[\longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi construite est appelée la transformée de Legendre de F.
   ii. Vérifier que, pour $p \in]c;d[$, $G'(p) = f^{\langle -1 \rangle}(p)$. En particulier, G est strictement convexe.
2. Montrer que, pour tout $x \in]a;b[$ et tout $p \in]c;d[$, $xp \leq G(p) + F(x)$.
3. Montrer que, pour $x \in]a;b[$,
$$H(x) \ := \ \sup_{p \in]c;d[} \big(xp \ - \ G(p) \big) \ \in \ \mathbb{R}$$

et que $H(x) = xf(x) - G(f(x))$.

II. Dans les cas suivants, choisir une primitive F de f, déterminer G, la transformée de Legendre de F, et appliquer le I.2.

1. $f = f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x$.
2. $f = f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow]0; +\infty[$ définie par $f_2(x) = e^x$.
3. $f = f_3 :]0; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[$ définie par $f_3(x) = (1 + \alpha)x^\alpha$, avec $\alpha > 0$.
4. $f = f_4 :]0; \pi/2[\longrightarrow]1; +\infty[$ définie par $f_4(x) = \tan x$.
5. $f = f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_5(x) = \operatorname{sh} x$.
6. $f = f_6 :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_6(x) = x^{-1} = 1/x$.
7. $f = f_7 :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_6(x) = \ln x$.
8. $f = f_6 :] - \pi/2; \pi/2[\longrightarrow] - 1; 1[$ définie par $f_8(x) = \sin x$.