Université de Cergy-Pontoise **2019-2020**
Calcul intégral, S5.

Préliminaires et rappels.

Exercice 1. : Soit E, F et G des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. On suppose f injective. Montrer que l'application $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est bijective.

En particulier, la composition de deux bijections est une bijection.

Exercice 2. : Soit A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer les propriétés

$$A \cap \big(B \cap C\big) \;=\; \big(A \cap B\big) \cap C\,, \quad A \cup \big(B \cup C\big) \;=\; \big(A \cup B\big) \cup C\,,$$

$$A \cup \big(B \cap C\big) \;=\; \big(A \cup B\big) \cap \big(A \cup C\big)\,, \quad A \cap \big(B \cup C\big) \;=\; \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cap C\big)\,,$$

$$\mathbb{R} \setminus \big(A \cup B\big) \;=\; \big(\mathbb{R} \setminus A\big) \cap \big(\mathbb{R} \setminus B\big)\,, \quad \mathbb{R} \setminus \big(A \cap B\big) \;=\; \big(\mathbb{R} \setminus A\big) \cup \big(\mathbb{R} \setminus B\big)\,.$$

Exercice 3. : Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$. Soit A et B des parties de E ou de F.

1. Montrer les propriétés suivantes :

$$f^{-1}\big(A \cap B\big) \;=\; f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\,, \quad f^{-1}\big(A \cup B\big) \;=\; f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\,,$$

$$f\big(A \cap B\big) \;\subset\; f(A) \cap f(B)\,, \quad f\big(A \cup B\big) \;=\; f(A) \cup f(B)\,.$$

2. Montrer que, si f est injective, alors $f\big(A \cap B\big) = f(A) \cap f(B)$.
3. Donner un choix de f, A et B tel que $f\big(A \cap B\big) \;\neq\; f(A) \cap f(B)$.

Les images réciproques d'ensemble ont des propriétés plus simples que les images directes.

Exercice 4. : Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$ indexée par I. On définit

$$\bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}\,;\; \exists i \in I\,;\; x \in A_i\big\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}\,;\; \forall i \in I\,,\, x \in A_i\big\}\,.$$

Donner une expression simple des ensembles suivants :

1. $$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i\,,$$

   pour $I = \mathbb{R}$ et $A_i = [0; 1]$, pour tout $i \in \mathbb{R}$;

2.
$$\bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i \,,$$
pour $I = \mathbb{N}^*$ et $A_i = [-i^{-1}; i^{-1}]$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$;

3.
$$\bigcap_{i\in I} A_i \,,$$
pour $I = \mathbb{N}^*$ et $A_i = [i; +\infty[$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$;

4.
$$\bigcap_{i\in I} A_i \,,$$
pour $I = \mathbb{Q}^*$ et $A_i = [\sqrt{2} - i^{-1}; \sqrt{2} + i^{-1}] \cap \mathbb{Q}$, pour tout $i \in \mathbb{Q}^*$. (On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)

Exercice 5. : On utilise l'exercice 4. Soit I et J deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles de parties d'un ensemble E, indexées par I et J, respectivement. Soit C une partie de E.

1. Montrer que
$$E \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i)\,, \quad E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus A_i)\,.$$

2. Montrer que
$$C \cup \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(C \cup A_i)\,, \quad C \cap \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(C \cap A_i)\,.$$

3. Montrer que
$$C \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(C \cap A_i)\,, \quad C \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(C \cup A_i)\,.$$

4. Montrer que
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i \cup B_j)\right) = \bigcup_{(i;j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)\,,$$
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right) = \bigcap_{(i;j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)\,.$$

5. Montrer que
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right) = \bigcup_{(i;j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)\,,$$
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j)\right) = \bigcap_{(i;j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)\,.$$

6. Montrer que

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right) = \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_j)\right),$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j)\right) = \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_j)\right).$$

Exercice 6. : Soit A un ensemble. On dit qu'il est au plus dénombrable s'il existe une injection $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$. On dit qu'il est dénombrable s'il existe une bijection $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$. On pourra utiliser l'exercice 1.

1. Montrer que l'application $j_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_1(-n) = 2n+1$, $j_1(n) = 2n$ et $j_1(0) = 0$, est bijective. $\mathbb{Z}$ est donc dénombrable.
2. Montrer que l'application $j_2 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_2(n) = n-1$, est bijective. $\mathbb{N}^*$ est donc dénombrable.
3. Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Montrer que D est dénombrable. (Indication : on pourra énumérer les éléments de D dans l'ordre croissant.)
4. Construire une application bijective $j_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
5. Construire une application bijective $j_4 : \mathbb{Q} \longrightarrow F$, où

$$F = \{(p;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; p/q \,\text{est irréductible}\}.$$

6. Pour $s \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble fini $D_s = \{(n;m) \in \mathbb{N}^2; n+m = s\}$ que l'on ordonne $D_s = \{a_0(s); a_1(s); \cdots; a_s(s)\}$ dans l'ordre croissant des ordonnées.
   a). Déterminer et représenter graphiquement les ensembles D_0, D_1, D_2, D_3 et D_4.
   b). Vérifier que $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est la réunion disjointe des ensembles D_s, pour $s \in \mathbb{N}$.
   c). On construit par récurrence une application $j : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ de la façon suivante. On pose $j(0;0) = 0$. Supposons contruites les restrictions $j_{|D_s}$ de j à D_s, pour $s \leq N$, telles que, pour $1 \leq s \leq N$, pour $0 < p \leq s$,

$$j(a_0(s)) = j(a_{s-1}(s-1)) + 1 \quad \text{et} \quad j(a_p(s)) = j(a_{p-1}(s)) + 1.$$

   Vérifier que cette propriété est héréditaire. L'application j est donc bien définie par le théorème de récurrence.
   d). Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in j(\mathbb{N}^2)$.
   e). Montrer que, pour $s \in \mathbb{N}$, $p \mapsto j(a_p(s))$ est strictement croissante. En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\max(j(D_s)) < \min(j(D_{s+1}))$.
   f). En déduire que j est bijective.
7. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. (Indication : on pourra utiliser $j \circ j_3 \circ j_4$).
8. Montrer qu'une partie d'un ensemble au plus dénombrable est aussi au plus dénombrable.
9. Montrer qu'un ensemble A est au plus dénombrable si et seulement si il est fini ou dénombrable.
10. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de parties de $\mathbb{R}$ au plus dénombrables.

a). Construire une application injective s de $\cup_{i\in I}B_i$ vers l'union disjointe des B_i qui est définie par

$$\bigsqcup_{i\in I} B_i \ := \ \left\{(i;x)\,; \quad i \in I \quad \text{et} \quad x \in B_i\right\}.$$

b). Construire une application injective J de $\sqcup_{i\in I}B_i$ vers $\mathbb{N}^2$.
c). En déduire que $\cup_{i\in I}B_i$ est au plus dénombrable.

Exercice 7. : On montre dans cet exercice que l'intervalle $]0;1[$ de $\mathbb{R}$ est non dénombrable. Pour ce faire, on va utiliser le **procédé diagonal de Cantor**. Dans l'optique d'une preuve par l'absurde, on suppose que $]0;1[$ est l'ensemble des termes d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire le développement décimal de u_n :

$$u_n \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{nk}}{10^k}.$$

On considère la suite de chiffres $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (avec $c_k \in [0;9] \cap \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) définie par $c_k = 4$ si $v_{kk} \neq 4$ et $c_k = 3$ si $v_{kk} = 4$. On considère le nombre réel

$$x \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}.$$

Vérifier que x n'est pas un décimal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \neq u_n$. En déduire une contradiction.

Exercice 8. : On pourra utiliser les exercices 1, 6 et 7. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On pose $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On suppose $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$. Trouver une bijection $g :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
2. On suppose $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Trouver une bijection $h :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
3. On suppose $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Trouver une bijection $k :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
4. Lorsque $a = b$, vérifier que I est un singleton. Il est donc fini.
5. On suppose que $a < b$ (I est infini cette fois). Montrer que I n'est pas dénombrable.

Remarque : On a montré que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont non dénombrables. Ils sont soit finis soit infinis non dénombrables.

Exercice 9. : Soit $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On étend la relation d'ordre sur $\mathbb{R}^+$ à $\overline{\mathbb{R}^+}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x < +\infty$. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^+$. L'ensemble des majorants de X a un plus petit élément, c'est la borne supérieure de X, notée $\sup X$. Elle appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.
2. On suppose que, pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tel que $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\ell = \sup A$ si et seulement si ℓ majore A et il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ℓ.

4. Soit $a \in A$ tel que, pour tout $a' \in A$, $a' \leq a$. Montrer qu'alors $a = \sup A$. (En particulier, a est le maximum de A.)
5. Soit c un majorant de A tel que, dans tout voisinage de c, il y a un élément de A. Montrer que $c = \sup A$.
6. Pour $\lambda \geq 0$, soit λA la partie de $\mathbb{R}^+$ définie par $\{\lambda a; a \in A\}$. Montrer que $\sup \lambda A = \lambda \sup A$.
7. Soit $b \in \mathbb{R}^+$, $A \subset \mathbb{R}^+$ et $B = \{a + b; a \in A\}$. Montrer que $\sup B = b + \sup A$ (avec la convention $b + (+\infty) = +\infty$).
8. Déterminer $\sup]0; 1]$, $\sup]0; 1[$, $\sup \mathbb{N}$, $\sup\{n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$, $\sup\{1 - n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 10. : Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On étend la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des majorants de X a un plus petit élément, c'est la borne supérieure de X, notée $\sup X$. Elle appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'ensemble des minorants de X a un plus grand élément, c'est la borne inférieure de X, notée $\inf X$. Elle appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.
2. On suppose que, pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$ tel que $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\ell = \sup A$ si et seulement si ℓ majore A et il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ℓ.
4. Soit $a \in A$ tel que, pour tout $a' \in A$, $a' \leq a$. Montrer qu'alors $a = \sup A$. (En particulier, a est le maximum de A.)
5. Soit c un majorant de A tel que, dans tout voisinage de c, il y a un élément de A. Montrer que $c = \sup A$.
6. Pour $\lambda \geq 0$, soit λA la partie de $\mathbb{R}$ définie par $\{\lambda a; a \in A\}$. Montrer que $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ et $\inf \lambda A = \lambda \inf A$.
7. Soit $b \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ et $B = \{a + b; a \in A\}$. Montrer que $\sup B = b + \sup A$ (avec la convention $b + (+\infty) = +\infty$). Montrer que $\inf B = b + \inf A$ (avec la convention $b + (-\infty) = -\infty$).
8. Pour $A \subset \mathbb{R}$, soit $B = \{-a; a \in A\}$. Montrer que $\sup B = -\inf A$ et $\inf B = -\sup A$ (avec les conventions $-(+\infty) = -\infty$ et $-(-\infty) = +\infty$).
9. Déterminer $\sup] - 3; -2]$, $\sup]0; 1[$, $\sup \mathbb{Q}$, $\sup\{1 - 3n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$, $\sup\{(-1)^n n; n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 11. : Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés de norme N_E et N_F respectivement ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit A une application linéaire de E dans F. Montrer dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ les égalités

$$\sup_{\substack{v \in E \\ N_E(v)=1}} N_F(A \cdot v) = \sup_{\substack{v \in E \\ N_E(v)\leq 1}} N_F(A \cdot v) = \sup_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{N_F(A \cdot v)}{N_E(v)}.$$

Remarque : Lorsque les “sup” précédents sont finis, il se trouve que A est une application continue. Réciproquement, si A est continue, alors on peut montrer que ces “sup” sont finis. Dans le cas où A est continue, la valeur commune des “sup” est un nombre réel positif appelé la norme d'opérateur de A, souvent notée $\|A\|$.

Exercice 12. : Une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si la proposition suivante est vérifiée par la partie I :

$$\forall (x;y) \in I^2\,, \quad x < y \implies [x;y] \subset I\,. \tag{1}$$

Ici $[x;y] = \{z \in \mathbb{R}; x \leq z \leq y\}$. On note par $\sup I$ (resp. $\inf I$) la borne supérieure (resp. inférieure) de I. On rappelle que $\sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Par convention, on décide que, pour $a \in \mathbb{R}$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$ (en fait $a < +\infty$ et $-\infty < a$). On convient aussi que $-\infty \leq +\infty$ (en fait $-\infty < +\infty$).
On va montrer que I est d'un des types suivants : $]\inf I; \sup I[$, $[\inf I; \sup I[$, $]\inf I; \sup I]$, $[\inf I; \sup I]$.

1. Vérifier que, pour $(a;b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ avec $a \leq b$. $]a;b[$, $]a;b]$, $[a;b[$ et $[a;b]$ sont des intervalles (quand ils sont non vides).
2. Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, la proposition ($\inf I < x < \sup I$) soit fausse. Montrer que I a un seul élément. On dit que I est un singleton.
3. Soit I un intervalle ayant au moins deux éléments. Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\inf I < x_0 < \sup I$. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ avec $\inf I < x < \sup I$ alors il existe $(y;z) \in I^2$ tel que $y < x < z$. En déduire $]\inf I; \sup I[\subset I$.
4. Conclure que I vaut $]\inf I; \sup I[$ ou $[\inf I; \sup I[$ ou $]\inf I; \sup I]$ ou $[\inf I; \sup I]$.

Remarque : La proposition (1) est vrai pour $I = \emptyset$. Il est donc légitime de considérer l'ensemble vide comme un intervalle. De plus, notons que, pour tous $a < b$ dans $\mathbb{R}$, on peut écrire $\emptyset =]b;a[=]b;a] = [b;a[= [b;a]$.

Exercice 13. : Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$, avec $d \in \mathbb{N} \cap [2; +\infty[$, s'écrit comme réunion au plus dénombrable de boules ouvertes.

Exercice 14. : Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose $\sup u = \sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $\inf u = \inf\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Montrer que $\sup u \leq \sup v$ et $\inf u \leq \inf v$.
2. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que $\ell = \sup u$ si et seulement si ℓ majore u et s'il existe une sous-suite de u qui tend vers ℓ.
3. Soit $\lambda \geq 0$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $\sup(\lambda u) = \lambda \sup u$.
4. Montrer que $\inf(-u) = -\sup u$.
5. Montrer que, si u est une suite croissante, $\lim u$ existe et vaut $\sup u$.
6. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $v_m = \sup\{u_n; n \geq m\}$ et $w_m = \inf\{u_n; n \geq m\}$. Montrer que v est décroissante et que w est croissante.

Exercice 15. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. Montrer que $\liminf(-u) = -\limsup u$ et $\liminf u \leq \limsup u$.
2. Soit $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. Montrer que si $\ell = \limsup u$ alors il existe une sous-suite v de u telle que $\ell = \lim v$. Montrer que si $\ell = \liminf u$ alors il existe une sous-suite w de u telle que $\ell = \lim w$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. Montrer que $\ell = \lim u$ si et seulement si $\liminf u = \limsup u = \ell$.
4. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\limsup \lambda u = \lambda \limsup u$.
5. Montrer que
$$\limsup(u+v) \leq \ \limsup u \ + \limsup v \ \ . \tag{2}$$
6. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (2) soit stricte.
7. On suppose que u converge. Montrer qu'on a égalité dans (2).
8. Montrer que
$$\liminf u \ + \limsup v \ \ \leq \ \limsup(u+v)\ . \tag{3}$$
(Indication : on pourra extraire des sous-suites appropriées).
9. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (3) soit stricte.
10. On suppose que les deux suites sont positives. Montrer que
$$\big(\liminf u\big)\ \cdot\ \big(\limsup v\big)\ \ \leq\ \limsup(u\cdot v)\ . \tag{4}$$
11. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (4) soit stricte.
12. On suppose que u converge. Montrer qu'on a égalité dans (4).

Exercice 16. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a := \liminf u_n \in I$ et $b := \limsup u_n \in I$ (en particulier $-\infty < a \leq b < +\infty$). Montrer que
$$\liminf f(u_n)\ =\ f(a) \quad \text{et} \quad \limsup f(u_n)\ =\ f(b)\ .$$
Application : déterminer $\limsup e^{3+2(-1)^n}$ et $\liminf e^{3+2(-1)^n}$.

Exercice 17. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, sa moyenne de Césaro, par
$$v_n \ = \ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\ . \tag{5}$$
Montrer que
$$\liminf u_n\ \leq\ \liminf v_n\ \leq\ \limsup v_n\ \leq\ \limsup u_n\ .$$
En choisissant $u_n = (-1)^{n+1}$, pour $n \geq 1$, vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge tandis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 18. : Soit E un ensemble. On considère une famille de fonctions $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, telle que, pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On définit deux nouvelles fonctions $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ de E dans $\mathbb{R}$ par, pour $x \in E$, $(\liminf f_n)(x) = \limsup(f_n(x))$ et $(\limsup f_n)(x) = \limsup(f_n(x))$.

1. On suppose que $E = \mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction croissante. Montrer que $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont aussi croissantes.
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction positive. Montrer que $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont aussi positives.
3. Soit $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\liminf(f_n+g) = (\liminf f_n)+g$ et $\limsup(f_n+g) = (\limsup f_n) + g$.
4. Soit $g : E \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\liminf(f_n g) = (\liminf f_n)g$ et $\limsup(f_n g) = (\limsup f_n)g$.

Exercice 19. : Soit X un ensemble et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, où $\overline{\mathbb{R}^+}$ est défini dans l'exercice 9. On pose $\sup f = \sup\{f(x); x \in X\} \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

1. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ et $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ deux fonctions telles que, pour tout $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$. Montrer que $\sup f \leq \sup g$.
2. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que $\ell = \sup f$ si et seulement si ℓ majore f et s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.
3. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que $\sup(\lambda f) = \lambda \sup f$.
4. Montrer que, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est croissante, $\lim_{+\infty} f$ existe et vaut $\sup f$.
5. Soit Y un ensemble. Soit $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que
$$\sup_{(x;y)\in X\times Y} f(x;y) \;=\; \sup_{x\in X}\left(\sup_{y\in Y} f(x;y)\right) \;=\; \sup_{y\in Y}\left(\sup_{x\in X} f(x;y)\right).$$
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que
$$\sup_{x\in X}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right) \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{x\in X} f_n(x)\right).$$

Exercice 20. : Soit I un intervalle de longueur strictement positive et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, c'est-à-dire vérifiant
$$\forall (a;b) \in I^2;\ \forall t \in [0;1]\,,\ f\big(ta + (1-t)b\big) \;\leq\; tf(a) \,+\, (1-t)f(b)\,. \tag{6}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : Pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in I$, pour tout $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$, on a
$$f\left(\sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \;\leq\; \sum_{i=1}^n m_i f(x_i)\,. \tag{7}$$
Montrer par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n) \in I$ et $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $m := \sum_{i=1}^n m_i > 0$, on a
$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \;\leq\; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i f(x_i)\,. \tag{8}$$

Exercice 21. : On rappelle que, pour $a > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, on définit $a^\gamma = e^{\gamma \ln a}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1; \cdots; a_n) \in]0; +\infty[^n$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{1/n} \ \leq \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \, .$$

(Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme et l'exercice 20.)
Remarque : On constate que l'inégalité précédente est encore vraie si les a_k sont positifs ou nuls en posant par convention que $0^{1/n} = 0$. Le membre de gauche de l'inégalité est appelé moyenne géométrique des nombres $a_1, \cdots, a_n$. Le membre de droite est appelé moyenne arithmétique des nombres $a_1, \cdots, a_n$. L'exercice montre donc que la moyenne arithmétique est toujours plus grande que la moyenne géométrique.

Exercice 22. : Dans tout l'exercice, on considère deux réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $(1/p) + (1/q) = 1$. Pour $t > 0$, soit $f_t : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ définie par $f_t(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f_t(x) = x^t = e^{t \ln x}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in [0; +\infty[^n$ et $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Soit $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) \ = \ f_{1/t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i f_t(x_i) \right) .$$

1. Soit $t > 0$. Montrer que f_t est croissante. Montrer qu'elle est dérivable partout lorsque $t \geq 1$. Vérifier que, si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $f_t(xy) = f_t(x) f_t(y)$.
   On remarque que $f_t \circ f_{1/t} = f_{1/t} \circ f_t = id$, où $id : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ est l'application définie par $id(x) = x$.
   On peut vérifier que f_t n'est pas dérivable en 0 lorsque $t < 1$.
2. Soit $t > 1$. Montrer que f_t est convexe.
3. Soit $t > 1$. En utilisant l'exercice 20, montrer que $g(t) \geq g(1)$.
4. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Soit

$$\lambda \ = \ \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q} \ > \ 0 \, .$$

   On choisit, pour tout $i \in \{1; \cdots, n\}$, $m_i = \lambda^{-q} |b_i|^q > 0$ et $x_i = m_i^{-1/p} |a_i| \geq 0$. Vérifier que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Montrer (avec le 3) l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \ \leq \ f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q} . \qquad (9)$$

5. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. L'inégalité (10) ci-dessous est vraie si, pour tout $i \in \{1; \cdots, n\}$, $b_i = 0$. On suppose que les b_i ne sont pas tous nuls. On note les termes non nuls $b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}$ avec $k \geq 1$. En appliquant l'inégalité (9), avec n remplacé par k, à des k-uples appropriés, montrer l'inégalité de Hölder suivante :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \ \leq \ f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big) \right) \cdot f_{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n} f_q\big(|b_i|\big) \right) . \qquad (10)$$

6. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. Appliquer l'inégalité (10) avec les a_i replacés par $|a_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. Appliquer cette même inégalité avec les a_i remplacés par les $|b_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. En déduire l'inégalité de Minkowski suivante :
$$f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i + b_i|\big)\right) \;\leq\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big)\right) \;+\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|b_i|\big)\right). \tag{11}$$
7. Montrer que l'application $N_{n;p} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $y = (y_1, \cdots, y_n)$, par
$$N_{n;p}(y) \;=\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|y_i|\big)\right),$$
est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
8. Soit ℓ^p l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\sum_{i=1}^{\infty} f_p\big(|a_i|\big) \;<\; +\infty\,.$$
Montrer que ℓ^p est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_p : \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, par
$$N_p(a) \;=\; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_p\big(|a_i|\big)\right),$$
est une norme sur ℓ^p.
9. Montrer que l'inégalité de Hölder (10) est encore valable en remplaçant p par 1 et le facteur dépendant de q par
$$\sup_{1\leq i\leq n} |b_i|\,.$$
10. Montrer directement (sans passer par l'inégalité de Hölder comme au 6) que l'inégalité de Minkowski (11) est encore valable lorsque p est remplacé par 1.
11. En déduire que les applications $N_{n;1}, N_{n;\infty} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies, pour $y = (y_1, \cdots, y_n)$, respectivement par
$$N_{n;1}(y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} |y_i| \quad \text{et} \quad N_{n;\infty}(y) \;=\; \sup_{1\leq i\leq n} |y_i|\,,$$
sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
12. Soit ℓ^1 l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \;<\; +\infty\,.$$
Montrer que ℓ^1 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_1 : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, par
$$N_1(a) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\,,$$
est une norme sur ℓ^1.

13. Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \;<\; +\infty\,.$$
Montrer que ℓ^∞ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_\infty : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, par
$$N_\infty(a) \;=\; \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|\,,$$
est une norme sur ℓ^∞.

Remarque : Les espaces ℓ^p étudiés ici constituent un cas particulier des espaces $\mathcal{L}^p$ qui seront introduits dans le cours et étudiés plus loin.

Exercice 23. : On pose $[1;+\infty] = [1;+\infty[\cup\{+\infty\}$ et on utilise la convention $1/\infty = 0$. On pourra utiliser les exercices 11 et 22.
Soit $(p;q) \in [1;+\infty]^2$ tel que $(1/p) + (1/q) = 1$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite complexe $e^{(k)}$ par $e^{(k)}_n = \delta_{nk}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e^{(k)} \in \ell^p$.
2. Soit $b \in \ell^q$. Montrer que l'application $B : \ell^p \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par
$$\ell^p \ni a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\mapsto\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}\,, \tag{12}$$
est bien définie, linéaire et continue sur ℓ^p muni de la norme N_p. Vérifier que la norme $\|B\|$ de cette application linéaire B vaut $N_q(b)$.
3. Soit $p \in [1;+\infty[$ (ce qui impose $q \in]1;+\infty]$). Soit E une application linéaire continue de ℓ^p dans $\mathbb{C}$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \overline{E(e^{(k)})}$. On considère l'application B associée à $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par (12).
   a). Vérifier que B est bien définie et linéaire sur l'espace vectoriel engendré par la famille des $e^{(k)}$, pour $k \in \mathbb{N}$, et qu'elle coïncide avec E sur cet espace.
   b). Soit $a \in \ell^p$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\overline{b_n}$ converge et que sa somme vaut $E(a)$. En particulier, $B = E$ sur ℓ^p. (Indication : on pourra utiliser, pour $N \in \mathbb{N}$, la suite $a^{(N)}$ définie par $a^{(N)}_n = a_n$ si $n \leq N$ et $a^{(N)}_n = 0$ sinon.)
   c). Soit $a \in \ell^p$. Soit a' la suite définie par $a'_n = |a_n||b_n|(\overline{b_n})^{-1}$, si $b_n \neq 0$ et $a'_n = |a_n|$ si $b_n = 0$. Vérifier que $a' \in \ell^p$ et que $N_p(a') = N_p(a)$. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \;\leq\; |E(a')|\,. \tag{13}$$
   d). Pour $N \in \mathbb{N}$, soit $b^{(N)}$ la suite définie par $b^{(N)}_n = b_n$ si $n \leq N$ et $b^{(N)}_n = 0$ sinon. Soit B_N l'application linéaire associée à $b^{(N)}$ par (12). Montrer que $\|B_N\| \leq \|E\|$. En déduire que $b \in \ell^q$ et $N_q(b) = \|E\|$.

Remarque : La propriété 2 montre qu'il existe, dans tous les cas, une injection linéaire isométrique (donc continue) de ℓ^q dans le dual de ℓ^p, c'est-à-dire l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de ℓ^p dans $\mathbb{C}$. La propriété 3 établit que cette application est bijective (et même isométrique) lorsque $p \in [1;+\infty[$ (et donc $q \in]1;+\infty]$). Il se trouve que ce n'est pas le cas lorsque $(p;q) = (+\infty;1)$.