Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Approfondissements, S4.

Parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 18. : Soit E, F et G des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

En particulier, la composition de deux bijections est une bijection.

Exercice 19. : Soit A, B et C des parties de $\mathbb{R}$. Montrer les propriétés suivantes :

$$A \cap \big(B \cap C\big) \;=\; \big(A \cap B\big) \cap C\,, \quad A \cup \big(B \cup C\big) \;=\; \big(A \cup B\big) \cup C\,,$$

$$A \cup \big(B \cap C\big) \;=\; \big(A \cup B\big) \cap \big(A \cup C\big)\,, \quad A \cap \big(B \cup C\big) \;=\; \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cap C\big)\,,$$

$$\mathbb{R} \setminus \big(A \cup B\big) \;=\; \big(\mathbb{R} \setminus A\big) \cap \big(\mathbb{R} \setminus B\big)\,, \quad \mathbb{R} \setminus \big(A \cap B\big) \;=\; \big(\mathbb{R} \setminus A\big) \cup \big(\mathbb{R} \setminus B\big)\,.$$

Exercice 20. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

1. Montrer les propriétés suivantes :

$$f^{-1}\big(A \cap B\big) \;=\; f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\,, \quad f^{-1}\big(A \cup B\big) \;=\; f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\,,$$

$$f\big(A \cap B\big) \;\subset\; f(A) \cap f(B)\,, \quad f\big(A \cup B\big) \;=\; f(A) \cup f(B)\,.$$

2. Montrer que, si f est injective, alors $f\big(A \cap B\big) = f(A) \cap f(B)$.
3. Donner un choix de f, A et B tel que $f\big(A \cap B\big) \;\neq\; f(A) \cap f(B)$.

Les images réciproques d'ensemble ont des propriétés plus simples que les images directes.

Exercice 21. : Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$ indexée par I. On définit

$$\bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}\,;\; \exists i \in I\,;\; x \in A_i\big\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \;=\; \big\{x \in \mathbb{R}\,;\; \forall i \in I\,,\, x \in A_i\big\}\,.$$

Donner une expression simple des ensembles suivants :

1. $$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i\,,$$
   pour $I = \mathbb{R}$ et $A_i = [0; 1]$, pour tout $i \in \mathbb{R}$;
2. $$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i\,,$$
   pour $I = \mathbb{N}^*$ et $A_i = [-i^{-1}; i^{-1}]$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$;

3.
$$\bigcap_{i\in I} A_i \ ,$$
pour $I = \mathbb{N}^*$ et $A_i = [i;+\infty[$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$;

4.
$$\bigcap_{i\in I} A_i \ ,$$
pour $I = \mathbb{Q}^*$ et $A_i = [\sqrt{2}-i^{-1};\sqrt{2}+i^{-1}]\cap\mathbb{Q}$, pour tout $i \in \mathbb{Q}^*$. (On rappelle que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.)

Exercice 22. : On utilise l'exercice 21. Soit I et J deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles de parties de $\mathbb{R}$ indexée par I et J, respectivement. Soit C une partie de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\mathbb{R}\setminus\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(\mathbb{R}\setminus A_i)\ , \quad \mathbb{R}\setminus\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(\mathbb{R}\setminus A_i)\ .$$

2. Montrer que
$$C\cup\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(C\cup A_i)\ , \quad C\cap\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(C\cap A_i)\ .$$

3. Montrer que
$$C\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(C\cap A_i)\ , \quad C\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(C\cup A_i)\ .$$

4. Montrer que
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cup\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i\cup B_j)\right) = \bigcup_{(i;j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)\ ,$$
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i\cap B_j)\right) = \bigcap_{(i;j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)\ .$$

5. Montrer que
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i\cap B_j)\right) = \bigcup_{(i;j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)\ ,$$
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i\cup B_j)\right) = \bigcap_{(i;j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)\ .$$

6. Montrer que

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right) = \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_j)\right),$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j)\right) = \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_j)\right).$$

Exercice 23. : Une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si la proposition suivante est vérifiée par la partie I :

$$\forall (x;y) \in I^2 ;\ x < y\ ,\ [x;y] \subset I\ .$$

Ici $[x;y] = \{z \in \mathbb{R}; x \leq z \leq y\}$. On note par $\sup I$ (resp. $\inf I$) la borne supérieure (resp. inférieure) de I. On rappelle que $\sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Par convention, on décide que, pour $a \in \mathbb{R}$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$ (en fait $a < +\infty$ et $-\infty < a$). On convient aussi que $-\infty \leq +\infty$ (en fait $-\infty < +\infty$).
On va montrer que I est d'un des types suivants : $]\inf I; \sup I[$, $[\inf I; \sup I[$, $]\inf I; \sup I]$, $[\inf I; \sup I]$.

1. Vérifier que, pour $(a;b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ avec $a \leq b$. $]a;b[$, $]a;b]$, $[a;b[$ et $[a;b]$ sont des intervalles (quand ils sont non vides).
2. Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, la proposition $(\inf I < x < \sup I)$ soit fausse. Montrer que I a un seul élément. On dit que I est un singleton.
3. Soit I un intervalle ayant au moins deux éléments. Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\inf I < x_0 < \sup I$. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ avec $\inf I < x < \sup I$ alors il existe $(y;z) \in I^2$ tel que $y < x < z$. En déduire $]\inf I; \sup I[\subset I$.
4. Conclure que I vaut $]\inf I; \sup I[$ ou $[\inf I; \sup I[$ ou $]\inf I; \sup I]$ ou $[\inf I; \sup I]$.

Exercice 24. : Soit A un ensemble. On dit qu'il est au plus dénombrable s'il existe une injection $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$. On dit qu'il est dénombrable s'il existe une bijection $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$. On pourra utiliser l'exercice 18.

1. Montrer que l'application $j_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_1(-n) = 2n+1$, $j_1(n) = 2n$ et $j_1(0) = 0$, est bijective. $\mathbb{Z}$ est donc dénombrable.
2. Montrer que l'application $j_2 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_2(n) = n-1$, est bijective. $\mathbb{N}^*$ est donc dénombrable.
3. Construire une application bijective $j_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
4. Construire une application bijective $j_4 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. (Indication : on pourra utiliser la représentation des rationnels en fraction irréductible).
5. Pour $s \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble fini $D_s = \{(n;m) \in \mathbb{N}^2; n+m = s\}$ que l'on ordonne $D_s = \{a_0(s); a_1(s); \cdots; a_s(s)\}$ dans l'ordre croissant des ordonnées.
   a). Déterminer et représenter graphiquement les ensembles D_0, D_1, D_2, D_3 et D_4.
   b). Vérifier que $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est la réunion disjointe des ensembles D_s, pour $s \in \mathbb{N}$.

c). On construit par récurrence une application $j : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ de la façon suivante. On pose $j(0;0) = 0$. Supposons contruites les restrictions $j_{|D_s}$ de j à D_s, pour $s \leq N$, telles que, pour $1 \leq s \leq N$, pour $0 < p \leq s$,

$$j(a_0(s)) \;=\; j(a_{s-1}(s-1)) + 1 \quad \text{et} \quad j(a_p(s)) \;=\; j(a_{p-1}(s)) + 1\,.$$

Vérifier que cette propriété est héréditaire. L'application j est donc bien définie par le théorème de récurrence.

d). Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in j(\mathbb{N}^2)$.

e). Montrer que, pour $s \in \mathbb{N}$, $p \mapsto j(a_p(s))$ est strictement croissante. En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\max(j(D_s)) < \min(j(D_{s+1}))$.

f). En déduire que j est bijective.

6. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. (Indication : on pourra utiliser l'application $j \circ j_3 \circ j_4$).
7. Montrer qu'une partie d'un ensemble au plus dénombrable est aussi au plus dénombrable.
8. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de parties de $\mathbb{R}$ au plus dénombrables.

a). Construire une application injective s de $\cup_{i\in I} B_i$ vers l'union disjointe des B_i qui est définie par

$$\bigsqcup_{i\in I} B_i \;:=\; \big\{(i;x)\,; \quad i \in I \quad \text{et} \quad x \in B_i\big\}\,.$$

b). Construire une application injective J de $\sqcup_{i\in I} B_i$ vers $\mathbb{N}^2$.

c). En déduire que $\cup_{i\in I} B_i$ est au plus dénombrable.

Exercice 25. : On pourra utiliser les exercices 18, 23 et 24. On **admet** que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On pose $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On suppose $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Trouver une bijection $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. On suppose $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$. Trouver une bijection $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
3. On suppose $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Trouver une bijection $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
4. On suppose $a = -\infty$ et $b = +\infty$. Trouver une bijection $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
5. Lorsque $a = b$, on a vu dans l'exercice 23 que I est un singleton. On suppose que $a < b$. Montrer que I n'est pas dénombrable.

On a montré que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont non dénombrables. Ils sont soit finis soit infinis non dénombrables.