

Familles sommables.

Conventions et notations : On pose $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On étend la relation d'ordre et les règles de calcul sur \mathbb{R}^+ à $\overline{\mathbb{R}^+}$ en décidant que $0 \cdot (+\infty) = 0$,

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad a < +\infty,$$

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}^+}, \quad a + (+\infty) = +\infty,$$

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}^+} \setminus \{0\}, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Étant donné un ensemble non vide (d'indices) I , on note par $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des parties finies non vides de I . L'ensemble $\mathcal{F}(I)$ est non vide.

Définition : Soit I un ensemble non vide. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ ou bien, de manière équivalente, soit $u : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une application qui à $i \in I$ associe $u(i) = u_i$. On définit la somme de cette famille par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{J \in \mathcal{F}(I)} \sum_{j \in J} u_j \in \overline{\mathbb{R}^+}.$$

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si sa somme est finie. Dans ce cas, chaque u_i est fini.

Remarque : Lorsque $I = D$, une partie infinie de \mathbb{N} , la famille $(u_i)_{i \in I}$ est aussi une suite $(u_n)_{n \in D}$. On identifie la série associée à la suite des sommes partielles de la série notée $(\sum_{n \in D}^N u_n)_{N \in \mathbb{N}}$. Comme cette suite est croissante, elle a une limite dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ que l'on note

$$\sum_{n \in D}^{\infty} u_n.$$

Cette dernière coïncide en fait avec la somme

$$\sum_{i \in I} u_i$$

de la famille $(u_i)_{i \in I}$. Le mot "somme" désigne, dans ce cas, à la fois la somme de la série et la somme de la famille sans confusion possible puisqu'elles sont égales.

Exercice 24. : Exemples de familles et de sommes.

1. Soit $I = \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $i \in I$, on pose $u_i = i^{-2}$ si $i \in \mathbb{N}^*$ et $u_i = 0$, sinon. La famille $u = (u_i)_{i \in I}$ est-elle sommable ?

2. Soit $I = \mathbb{R}^+$ et, pour $i \in I$, $v_i = i$. La famille $v = (v_i)_{i \in I}$ est-elle sommable ?
3. Soit $I = [0; 1]$ et, pour $i \in I$, $w_i = i$. La famille $w = (w_i)_{i \in I}$ est-elle sommable ?
4. Soit $I = \{1; 4; 7; 13\}$ et, pour $i \in I$, $x_i = i$. Quelle est la somme de la famille $x = (x_i)_{i \in I}$?
5. Soit $I = \mathbb{R}$ et $J = \{1; 4; 7; 13\}$. Soit $y = (y_i)_{i \in I}$ la famille définie par $y_i = i$ si $i \in J$ et $y_i = 0$ sinon. Quelle est la somme de la famille y ?
6. Soit $c \in \mathbb{R}^+$, I un ensemble quelconque et $z = (z_i)_{i \in I}$ la famille définie par $z_i = c$ si $i \in I$. Que vaut la somme de la famille z ?

Exercice 25. : Soit I un ensemble non vide. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$.

1. Montrer que $(u_i)_{i \in I}$ est sommable de somme s si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \in \mathcal{F}(I)$ tel que, pour tout $J \in \mathcal{F}(I)$ avec $J_\epsilon \subset J$,

$$s - \epsilon \leq \sum_{j \in J} u_j \leq s.$$

2. On suppose $(u_i)_{i \in I}$ sommable. Soit $K = \{i \in I; u_i \neq 0\}$. En remarquant que

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{i \in I; u_i > n^{-1}\},$$

montrer que K est au plus dénombrable.

3. Que vaut la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ lorsque K est un ensemble fini ?
4. Que vaut la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ lorsqu'il existe i_0 tel que $u_{i_0} = +\infty$?
5. Soit I' un sous-ensemble de I . Montrer que

$$\sum_{i \in I'} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i.$$

Exercice 26. : Soit I un ensemble non vide. Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$.

1. On suppose que, pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$. Montrer que

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

2. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que

$$\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \cdot \left(\sum_{i \in I} u_i \right).$$

3. Montrer que

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i) \leq \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i.$$

4. Soit $(J, J') \in \mathcal{F}(I)^2$. Vérifier que

$$\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in J \cup J'} u_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in J'} v_i \leq \sum_{i \in J \cup J'} v_i.$$

5. En déduire que

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i.$$

Exercice 27. : Soit I et J deux ensembles non vides et $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$. On va démontrer le "petit" théorème de Fubini qui affirme que

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{ij} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij}. \quad (14)$$

1. Montrer que la première égalité de (14) est vraie lorsque I est remplacé par un ensemble $I_f \in \mathcal{F}(I)$. (Indication : on pourra procéder par récurrence sur le cardinal de I_f).
2. En déduire que

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{ij} \right) = \sup_{(I_f; J_f) \in \mathcal{F}(I) \times \mathcal{F}(J)} \sum_{(i,j) \in I_f \times J_f} u_{ij}. \quad (15)$$

3. Montrer la première égalité de (14).
4. Soit $F \in \mathcal{F}(I \times J)$. Montrer qu'il existe $I_F \in \mathcal{F}(I)$ et $J_F \in \mathcal{F}(J)$ tels que $F \subset I_F \times J_F$.
5. En déduire la seconde égalité de (14).

Exercice 28. : Soit I un ensemble non vide. On considère une partition de $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} : \Lambda$ est un ensemble non vide ; pour $\lambda \in \Lambda$, $I_\lambda \subset I$ (I_λ n'est pas forcément fini) ; si $\lambda \neq \lambda'$ dans Λ alors $I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \emptyset$; $I = \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$. Soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer la formule dite de sommation par paquets suivante :

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} v_i \right). \quad (16)$$

(Indication : on pourra utiliser l'exercice 27 avec $J = \Lambda$ et, pour $\lambda \in \Lambda$, $u_{i\lambda} = v_i$ si $i \in I_\lambda$ et $u_{i\lambda} = 0$ sinon.)

Exercice 29. : Soit I un ensemble non vide. Soit $(u_{i;n})_{(i;n) \in I \times \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ telle que, pour tout $i \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{i;n} \leq u_{i;n+1}$. Comme, pour chaque $i \in I$, $(u_{i;n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, elle admet un limite dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ que l'on note par v_i .

1. Montrer que la limite suivante existe et que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} u_{i;n} \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

2. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} u_{i;n} = \sum_{i \in I} v_i .$$

3. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} u_{i;n} = \sum_{i \in I} v_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I} u_{i;n} = \sum_{i \in I} \sup_{n \in \mathbb{N}} u_{i;n} .$$

Remarque : Le résultat de cet exercice ressemble au théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Lévi) du cours. On peut même montrer que c'en est un cas particulier.

Exercice 30. : Soit $b \in \mathbb{R}$ et $a = (a_{m;n})_{(m;n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ une famille définie par $a_{m;n} = (m+n)^b$.

1. On suppose $b \geq 0$. Montrer que a n'est pas sommable.
2. On suppose $b < -2$. Montrer que a est sommable. (Indication : on pourra utiliser le fait que $m+n \geq \sqrt{mn}$ et les séries de Riemann.)
3. On suppose $-1 \leq b < 0$. Montrer que a n'est pas sommable. (Indication : on pourra étudier à m fixé les sommes $\sum_n a_{m;n}$.)
4. On suppose $-2 \leq b < -1$. Montrer, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (m+n)^b \geq m \cdot (2m)^b .$$

(Indication : on pourra comparer la somme avec une intégrale.) En déduire que a n'est pas sommable.

Exercice 31. : Pour un intervalle I de \mathbb{R} , on définit sa longueur $\ell(I)$ par

$$\ell(I) = (\sup I) - (\inf I) \in \overline{\mathbb{R}^+} ,$$

avec la convention $-(-\infty) = +\infty$. On admet que tout ouvert non vide \mathcal{O} de \mathbb{R} est la réunion d'une famille $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{O}}}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, où l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{O}}$ est au plus dénombrable (cf. exercice 13). On pose

$$L(\mathcal{O}) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{\mathcal{O}}} \ell(I_\lambda) \in \overline{\mathbb{R}^+} .$$

1. Trouver un ouvert non vide \mathcal{O} tel que $L(\mathcal{O}) = +\infty$ et $\Lambda_{\mathcal{O}}$ est un ensemble fini.
2. Trouver un ouvert non vide \mathcal{O} tel que $L(\mathcal{O}) < +\infty$ et $\Lambda_{\mathcal{O}}$ est un ensemble infini.
3. Soit \mathcal{O} et \mathcal{O}' deux ouverts non vides de \mathbb{R} tels que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Montrer qu'alors $L(\mathcal{O}) \leq L(\mathcal{O}')$.
4. Soit \mathcal{O} et \mathcal{O}' deux ouverts non vides de \mathbb{R} . En notant par \overline{A} l'adhérence de A , on remarque que $\mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}'}$ et $\mathcal{O}' \setminus \overline{\mathcal{O}}$ sont des ouverts de \mathbb{R} . Montrer que

$$L(\mathcal{O} \cup \mathcal{O}') = L(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}') + L(\mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}'}) + L(\mathcal{O}' \setminus \overline{\mathcal{O}}) .$$

5. Soit $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts non vides de \mathbb{R} deux à deux disjoints. Montrer que

$$L\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} L(\mathcal{O}_n).$$

Remarque : La fonction L définit une notion de longueur pour les ouverts de \mathbb{R} . Les propriétés de L établies dans cet exercice sont proches de celles d'une mesure.

Exercice 32. : Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant, appelé **produit de Cauchy de séries** : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. Alors la série $\sum c_n$ de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{\ell=0}^n a_{n-\ell} b_\ell = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} a_p b_q$$

est absolument convergente et on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q \right). \quad (17)$$

1. Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ la famille donnée par $u_{p,q} = |a_p| \cdot |b_q|$. Montrer que u est sommable et sa somme peut s'écrire :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} |a_p b_q| \right). \quad (18)$$

2. En déduire que $\sum c_n$ converge absolument.
3. Montrer l'égalité (17).

Remarque générale :

Pour une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel normé $(E; \|\cdot\|)$, on dit qu'elle est sommable de somme $s \in E$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \in \mathcal{F}(I)$ tel que, pour tout $J \in \mathcal{F}(I)$ avec $J_\epsilon \subset J$,

$$\left\| \sum_{j \in J} u_j - s \right\| \leq \epsilon.$$

Cela est similaire à la propriété du 1 de l'exercice 25. On peut étendre un bon nombre des propriétés précédentes aux familles sommables de vecteurs. Lorsque E est complet, on peut montrer que toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E absolument sommable, c'est-à-dire telle que $(\|u_i\|)_{i \in I}$ est sommable, est sommable. Pour plus d'information, on pourra consulter le livre de Claude Tisseron : Notions de Topologie, introduction aux espaces fonctionnels. Hermann.