Université de Cergy-Pontoise **2017-2018**
Master MEEF 1, Math +.

Suites réelles et complexes.

Exercice 21. : Soit $c \in \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que la suite constante égale à c converge vers c. Montrer que $\lim n = +\infty$. En déduire que $\lim(1/n) = 0$. Que peut-on dire de la limite de

$$u_n \;=\; \frac{n^3+7n+9}{-n^2+3n+11} \;?$$

Montrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^{in\pi/4}$ n'a pas de limite dans $\mathbb{C}$. Que peut-on dire de la limite de la suite w définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = v_n/n$?

Exercice 22. : Montrer qu'une suite convergente dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ est de Cauchy. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

Exercice 23. : Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a^k\,.$$

Montrer de deux façons différentes qu'elle est de Cauchy.

Exercice 24. : Soit $a \in \mathbb{N}$, $D = [\![a; \rightarrow [\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que u est croissante si et seulement si, pour tout $n \in D$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Exercice 25. : Étudier la nature des suites u, v, w, x, y et z données par

$$u_n \;=\; \frac{3-4n^2+6n^3}{-2n^3+5n^2-n-1}\,, \quad v_n \;=\; \frac{\sin n}{n} - \ln(n)\,, \quad w_n \;=\; \frac{e^{in}}{n} + \frac{3n}{n+2}\,,$$

$$x_n \;=\; n - \ln(n)\,, \quad y_n \;=\; \big(1+3/n\big)^n\,, \quad z_n \;=\; e^{-n}(n^4+1)\,.$$

Exercice 26. : Soit $a \in \mathbb{C}$ et $N = E(|a|)+1$. Montrer que la suite $(|a|^n/n!)_{n\geq N}$ est décroissante. En déduire que $(a^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Retrouver ce dernier résultat en utilisant la série définissant l'exponentielle.

Exercice 27. : Vrai ou faux ? Justifier toute réponse.

1. La suite $(3^{-n} + 7\cdot 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. La suite $(3^{n} - 5\cdot 2^{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. Une suite croissante de réels converge.
4. Une suite minorée par 1 converge vers un $\ell \geq 1$.
5. Une suite convergente est de Cauchy.
6. Une suite convergente $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est stationnaire.
7. Les suites u et v données par $u_n = 3/n$ et $v_n = (n^2+1)(n^3+n+2)^{-1}$ sont équivalentes.
8. $\cos n = o(n)$.

Exercice 28. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain ℓ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain ℓ'. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $\ell = \ell'$ et préciser sa limite. Que se passe-t-il si $\ell \neq \ell'$?

Exercice 29. : Soit $b > a > 0$. Étudier l'existence et, dans ce cas, déterminer la valeur de la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par

$$u_n = \sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{n+1}\right|}\,,\ v_n = \sqrt[n]{\left|3+\frac{2}{n+1}+(-1)^n\right|}\,,\ w_n = \sqrt[n]{|a^{n+1}|}\,,$$

$$x_n = \sqrt[n]{|(-a)^n+b^n|}\,,\ y_n = \sqrt[n]{|2+(-1)^n|^{n+1}}\,,\ z_n = \sqrt[n]{|n!|}\,.$$

Exercice 30. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle ou complexe convergeant vers un certain ℓ. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, sa moyenne de Césaro, par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\,. \tag{1}$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 31. : Intégrales de Wallis et formule de Stirling. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \big(\cos t\big)^n\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \big(\sin t\big)^n\,dt\,.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. Montrer que $\lim \frac{I_{n+2}}{I_n} = 1$. En déduire que $\lim \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. *Indication* : utiliser le 2.
5. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{\pi\cdot(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

6. Montrer que $\lim I_{n+1}I_n = 0$. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. *Indication* : montrer d'abord que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
7. Montrer que $\lim nI_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$. En déduire que $(I_n\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. *Indication* : utiliser le 4.
8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \frac{(n!)\cdot e^n}{n^{\alpha+n}} = (n!)\cdot e^n\cdot e^{-(\alpha+n)\ln n} > 0 \quad \text{et} \quad v_n = \ln\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big)\,.$$

   a). Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell > 0$ si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge.

b). Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge si et seulement si $\alpha = \frac{1}{2}$. *Indication* : on pourra utiliser un développement limité de v_n.

c). On choisit désormais $\alpha = \frac{1}{2}$. Montrer que

$$\lim \frac{u_n^2}{u_{2n}} \;=\; \sqrt{2\pi}\,.$$

Indication : utiliser le 7.

d). En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la formule de Stirling :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} \;=\; 1\,.$$