Université de Cergy-Pontoise **2015-2016**
Approfondissements, S4.

Suites réelles.

Exercice 23. : Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par

$$u_n = (-1)^n,\, v_n = (-1)^n n,\, w_n = \frac{(-1)^n}{n+1},\, x_n = \cos(n\pi/4),\, y_n = u_n + x_n,\, z_n = u_n + w_n.$$

Exercice 24. : Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites de l'exercice 23.

Exercice 25. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles équivalentes. Cela signifie qu'il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = k_n v_n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Exercice 26. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain ℓ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain ℓ'. Montrer que $\mathcal{VA}(u) = \{\ell; \ell'\}$.

Exercice 27. : Pour une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note par $\mathcal{VA}(a_n)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\mathcal{VA}(u_n) \subset I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\mathcal{VA}(f(u_n)) = f(\mathcal{VA}(u_n))$.

Exercice 28. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\limsup u_n < +\infty$, $\limsup v_n < +\infty$ et $\limsup(u_n + v_n) < (\limsup u_n) + (\limsup v_n)$.
2. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout n, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, $\limsup u_n < +\infty$, $\limsup v_n < +\infty$ et $\limsup(u_n v_n) < (\limsup u_n) \cdot (\limsup v_n)$.
3. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout n, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, $\limsup u_n = +\infty$, $\limsup v_n < +\infty$ et $\limsup(u_n v_n) < +\infty$.
4. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout n, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, $\limsup u_n = +\infty$, $\limsup v_n = +\infty$ et $\limsup(u_n v_n) < +\infty$.
5. Donner un choix de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $-\infty < \inf u_n < \liminf u_n < \limsup u_n < \sup u_n < +\infty$.

Exercice 29. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. Montrer que $\liminf(-u_n) = -\limsup u_n$.
2. Montrer que
$$\liminf u_n + \limsup v_n \;\leq\; \limsup(u_n + v_n)\,. \tag{5}$$
3. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (5) soit stricte.

4. On suppose que les deux suites sont positives. Montrer que

$$\big(\liminf u_n\big) \;\cdot\; \big(\limsup v_n\big) \;\leq\; \limsup(u_n \cdot v_n)\,. \tag{6}$$

5. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (6) soit stricte.

Exercice 30. : Soit $b > a > 0$. Déterminer la limite supérieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par

$$u_n \;=\; \sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{n+1}\right|}\,,\; v_n \;=\; \sqrt[n]{\left|3+\frac{2}{n+1}+(-1)^n\right|}\,,\; w_n \;=\; \sqrt[n]{|a^{n+1}|}\,,$$

$$x_n \;=\; \sqrt[n]{|(-a)^n+b^n|}\,,\; y_n \;=\; \sqrt[n]{|2+(-1)^n|^{n+1}}\,,\; z_n \;=\; \sqrt[n]{|n!|}\,.$$

Exercice 31. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a := \liminf u_n \in I$ et $b := \limsup u_n \in I$ (en particulier $-\infty < a \leq b < +\infty$). Montrer que

$$\liminf f(u_n) \;=\; f(a) \quad \text{et} \quad \limsup f(u_n) \;=\; f(b)\,.$$

Application : déterminer $\limsup e^{3+2(-1)^n}$ et $\liminf e^{3+2(-1)^n}$.

Exercice 32. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, sa moyenne de Césaro, par

$$v_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\,. \tag{7}$$

Montrer que

$$\liminf u_n \;\leq\; \liminf v_n \;\leq\; \limsup v_n \;\leq\; \limsup u_n\,.$$

En choisissant $u_n = (-1)^{n+1}$, pour $n \geq 1$, vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge mais que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 33. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. On considère sa moyenne de Césaro c'est-à-dire la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par (7) dans l'exercice 32.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa moyenne de Césaro. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\lim a_n$. (Indication : utiliser l'exercice 32).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2n} \;=\; \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\big(u_{2k}+u_{2k-1}\big)\,.$$

3. Montrer que la suite $(v_{2n} - (\ell+\ell')/2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la moyenne de Césaro d'une suite convergeant vers 0. En déduire que $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+1} = 2n(2n+1)^{-1}v_{2n} + (2n+1)^{-1}u_{2n+1}$.
5. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 34. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - x^2$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On note par $\mathcal{VA}(u_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que les points fixes de f sont $p_- = (-1-\sqrt{5})/2$ et $p_+ = (-1+\sqrt{5})/2$.
2. Montrer que $|f'(p_+)| > 1$ et $|f'(p_-)| > 1$.
3. Calculer $\mathcal{VA}(u_n)$ lorsque $u_0 = 0$ et lorsque $u_0 = 1$.
4. Soit $g = f \circ f$.
   a. Vérifier que p_+ et p_- sont des points fixes de g.
   b. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2(2 - x^2)$. Montrer que l'ensemble des points fixes de g est $\{p_-; 0; p_+; 1\}$.
   c. Montrer que, pour $|x| \leq 1/8$ ou $|x - 1| \leq 1/30$, $|g'(x)| \leq 1/2$.
   d. En déduire que $g(A) \subset A$ pour $A = [-1/8; 1/8]$ et $A = [1 - 1/30; 1 + 1/30]$.
   e. Vérifier que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes associées à g.
5. On choisit u_0 tel que $|u_0| \leq 1/8$. Vérifier que $u_1 \in [1 - 1/30; 1 + 1/30]$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{2n}| \leq 2^{-2n}$ et $|u_{2n+1} - 1| \leq 2^{-2n-1}$.
7. En déduire que $\lim u_{2n} = 0$ et $\lim u_{2n+1} = 1$. Donc $\mathcal{VA}(u_n) = \{0; 1\}$ d'après l'exercice 26.

On pourra comparer cet exercice avec certains exercices de L1 sur les suites récurrentes.

Exercice 35. : Pour une partie A de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{d}(x; A) = \inf\{|x - y|\,;\ y \in A\}\,.$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Soit $\epsilon > 0$. Montrer par l'absurde que l'ensemble

$$\big\{n \in \mathbb{N}\,;\ \mathrm{d}(u_n; \mathcal{VA}(u)) \geq \epsilon\big\}$$

est fini.