Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Approfondissements, S4.

Suites réelles.

Exercice 26. : Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par

$$u_n = (-1)^n, v_n = (-1)^n n, w_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, x_n = \cos(n\pi/4), y_n = u_n + x_n, z_n = u_n + w_n.$$

Que valent $\limsup x_{2n+1}$ et $\liminf x_{2n+1}$?

Exercice 27. : Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites de l'exercice 26.

Exercice 28. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles équivalentes. Cela signifie qu'il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = k_n v_n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Exercice 29. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain ℓ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain ℓ'. Montrer que $\mathcal{VA}(u) = \{\ell; \ell'\}$. Que peut-on dire de plus lorsque $\ell = \ell'$?

Exercice 30. : Pour une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note par $\mathcal{VA}(a_n)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\mathcal{VA}(u_n) \subset I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\mathcal{VA}(f(u_n)) = f(\mathcal{VA}(u_n))$.

Exercice 31. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\limsup u_n < +\infty$, $\limsup v_n < +\infty$ et $\limsup(u_n + v_n) < (\limsup u_n) + (\limsup v_n)$.
2. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout n, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, $\limsup u_n < +\infty$, $\limsup v_n < +\infty$ et $\limsup(u_n v_n) < (\limsup u_n) \cdot (\limsup v_n)$.
3. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout n, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, $\limsup u_n = +\infty$, $\limsup v_n < +\infty$ et $\limsup(u_n v_n) < +\infty$.
4. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout n, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, $\limsup u_n = +\infty$, $\limsup v_n = +\infty$ et $\limsup(u_n v_n) < +\infty$.
5. Donner un choix de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $-\infty < \inf u_n < \liminf u_n < \limsup u_n < \sup u_n < +\infty$.

Exercice 32. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. Montrer que $\liminf(-u_n) = -\limsup u_n$.
2. Montrer que
$$\liminf u_n + \limsup v_n \leq \limsup(u_n + v_n) . \tag{6}$$
(Indication : on pourra extraire des sous-suites appropriées).

3. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (6) soit stricte.
4. On suppose que les deux suites sont positives. Montrer que

$$\left(\liminf u_n\right) \cdot \left(\limsup v_n\right) \leq \limsup (u_n \cdot v_n) . \tag{7}$$

5. Donner un choix des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que l'inégalité dans (7) soit stricte.

Exercice 33. : Soit $b > a > 0$. Déterminer la limite supérieure des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par

$$u_n = \sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{n+1}\right|},\ v_n = \sqrt[n]{\left|3+\frac{2}{n+1}+(-1)^n\right|},\ w_n = \sqrt[n]{|a^{n+1}|},$$

$$x_n = \sqrt[n]{|(-a)^n+b^n|},\ y_n = \sqrt[n]{|2+(-1)^n|^{n+1}},\ z_n = \sqrt[n]{|n!|}.$$

Exercice 34. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a := \liminf u_n \in I$ et $b := \limsup u_n \in I$ (en particulier $-\infty < a \leq b < +\infty$). Montrer que

$$\liminf f(u_n) = f(a) \quad \text{et} \quad \limsup f(u_n) = f(b) .$$

Application : déterminer $\limsup e^{3+2(-1)^n}$ et $\liminf e^{3+2(-1)^n}$.

Exercice 35. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, sa moyenne de Césaro, par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k . \tag{8}$$

Montrer que

$$\liminf u_n \leq \liminf v_n \leq \limsup v_n \leq \limsup u_n .$$

En choisissant $u_n = (-1)^{n+1}$, pour $n \geq 1$, vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge tandis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 36. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. On considère sa moyenne de Césaro c'est-à-dire la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par (8) dans l'exercice 35.

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite convergente et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa moyenne de Césaro. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\lim a_n$. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 35).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(u_{2k}+u_{2k-1}\right).$$

3. Montrer que la suite $(v_{2n} - (\ell+\ell')/2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la moyenne de Césaro d'une suite convergeant vers 0. En déduire que $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n+1} = 2n(2n+1)^{-1}v_{2n} + (2n+1)^{-1}u_{2n+1}$.

5. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 29.)

Exercice 37. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - x^2$. On considère la suite récurrente $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On note par $\mathcal{VA}(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que les points fixes de f sont $p_- = (-1-\sqrt{5})/2$ et $p_+ = (-1+\sqrt{5})/2$.
2. Montrer que $|f'(p_+)| > 1$ et $|f'(p_-)| > 1$.
3. Calculer $\mathcal{VA}(u)$ lorsque $u_0 = 0$ et lorsque $u_0 = 1$.
4. Soit $g = f \circ f$.
   a. Vérifier que p_+ et p_- sont des points fixes de g.
   b. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2(2-x^2)$. Montrer que l'ensemble des points fixes de g est $\{p_-; 0; p_+; 1\}$.
   c. Montrer que, pour $|x| \leq 1/8$ ou $|x-1| \leq 1/30$, $|g'(x)| \leq 1/2$.
   d. En déduire que $g(A) \subset A$ pour $A = [-1/8; 1/8]$ et $A = [1-1/30; 1+1/30]$.
   e. Vérifier que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes associées à g.
5. On choisit u_0 tel que $|u_0| \leq 1/8$. Vérifier que $u_1 \in [1-1/30; 1+1/30]$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{2n}| \leq 2^{-2n}$ et $|u_{2n+1} - 1| \leq 2^{-2n-1}$.
7. En déduire que $\lim u_{2n} = 0$ et $\lim u_{2n+1} = 1$. Donc $\mathcal{VA}(u) = \{0; 1\}$ d'après l'exercice 29.

On pourra comparer cet exercice avec certains exercices de L1 sur les suites récurrentes.

Exercice 38. : Pour une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{d}(x; A) \;=\; \inf\{|x-y|\,;\; y \in A\} \quad (\geq 0)\,.$$

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Soit $\epsilon > 0$. Montrer par l'absurde que l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N}\,;\; \mathrm{d}(u_n; \mathcal{VA}(u)) \,\geq\, \epsilon\}$$

est fini.