

Tribus.

Exercice 33. : Soit E un ensemble. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Pour $E = \emptyset$, $E = \{a\}$, $E = \{a; b\}$ avec deux éléments distincts a et b , $E = \{a; b; c\}$ avec trois éléments distincts a , b et c , déterminer explicitement $\mathcal{P}(E)$.
2. Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
3. On note par 2^E l'ensemble des applications de E dans $\{0; 1\}$. Soit $\mathbb{1} : \mathcal{P}(E) \rightarrow 2^E$ définie, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, par $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0; 1\}$ avec $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon. $\mathbb{1}_A$ est appelée la fonction caractéristique de A . Montrer que $\mathbb{1}$ est bijective.
4. Soit $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. Soit $D \in \mathcal{P}(E)$ défini par $D = \{x \in E; x \notin f(x)\}$. Montrer par l'absurde que $D \notin f(E)$.
5. En déduire qu'il n'existe pas de bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$. Donner une injection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 34. : Soit E un ensemble. On considère la relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ donnée par l'inclusion. Soit \mathcal{A} une partie de $\mathcal{P}(E)$ (\mathcal{A} est aussi un élément de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$). On appelle élément maximal de \mathcal{A} (pour l'inclusion) un élément M de \mathcal{A} vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad (M \subset A \implies M = A).$$

On appelle élément minimal de \mathcal{A} (pour l'inclusion) un élément N de \mathcal{A} vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad (A \subset N \implies N = A).$$

La borne supérieure de \mathcal{A} , notée $\sup \mathcal{A}$, est le plus petit majorant de \mathcal{A} , s'il existe. La borne inférieure de \mathcal{A} , notée $\inf \mathcal{A}$, est le plus grand minorant de \mathcal{A} , s'il existe. Dans les deux cas, c'est un élément de $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire une partie de E .

1. Soit $E = \{a; b\}$ avec deux éléments distincts a et b . Trouver deux parties A et B de E qui sont incomparables pour l'inclusion, c'est-à-dire telles que $(A \subset B)$ est fausse et $(B \subset A)$ est aussi fausse.
2. Soit $E = \{a; b\}$ avec deux éléments distincts a et b . Soit $\mathcal{A} = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}\}$. Montrer que $\{a\}$ est un élément maximal de \mathcal{A} et qu'il en est de même pour $\{b\}$.
3. Soit $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{]n^{-1}; 1 - n^{-1}[; n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que \mathcal{A} n'a pas d'élément maximal.
4. Pour E quelconque et \mathcal{A} une partie de $\mathcal{P}(E)$, montrer que \mathcal{A} a toujours au moins un majorant.

5. Soit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble des majorants de \mathcal{A} . Montrer que

$$S = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} M$$

est un élément minimal de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ n'en a pas d'autre.

\mathcal{A} admet donc une borne supérieure. On montre de même que \mathcal{A} admet une borne inférieure.

6. Vérifier que

$$\sup \mathcal{A} = \bigcup_{T \in \mathcal{A}} T \quad \text{et} \quad \inf \mathcal{A} = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} T.$$

7. Pour $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{]n^{-1}; 1 - n^{-1}[; n \in \mathbb{N}^*\}$, déterminer $\sup \mathcal{A}$ et $\inf \mathcal{A}$.

Exercice 35. : Soit E un ensemble et $\mathcal{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E . On appelle limite inférieure de \mathcal{A} l'ensemble

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf \mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} A_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} A_k.$$

On appelle limite supérieure de \mathcal{A} l'ensemble

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup \mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} A_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} A_k.$$

1. Soit $x \in E$. Montrer que $x \in \liminf \mathcal{A}$ si et seulement si x appartient à tous les A_n sauf un nombre fini.
2. Soit $x \in E$. Montrer que $x \in \limsup \mathcal{A}$ si et seulement si x appartient à une infinité de A_n .
3. Soit $(F; G) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit \mathcal{A} la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de E donnée par, pour $p \in \mathbb{N}$, $A_{2p} = F$ et $A_{2p+1} = G$. Déterminer $\liminf \mathcal{A}$ et $\limsup \mathcal{A}$.
4. Soit \mathcal{A} la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de \mathbb{R} donnée par, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n =] - \infty; a_n]$ où, pour $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 1 + (2p)^{-1}$ et $a_{2p+1} = -1 - (2p + 1)^{-1}$. Déterminer $\liminf \mathcal{A}$ et $\limsup \mathcal{A}$.
5. Montrer que

$$\mathbb{1}_{\liminf \mathcal{A}} = \liminf \mathbb{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{\limsup \mathcal{A}} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}.$$

Exercice 36. : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties.

1. Montrer que $\{\emptyset; \Omega\}$ est une tribu sur Ω .
2. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω .
3. Soit \mathcal{T} une tribu sur Ω . Montrer que $\{\emptyset; \Omega\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
4. Soit \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux tribus sur Ω . Montrer que $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ est une tribu sur Ω .

5. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ (\mathcal{A} est donc un ensemble de parties de Ω). Soit $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des tribus \mathcal{T} sur Ω telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Montrer que

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) := \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}} \mathcal{T}$$

est une tribu sur Ω , qui contient \mathcal{A} . C'est bien sûr le minimum de $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. On dit que c'est la tribu engendrée par \mathcal{A} .

Remarque : La tribu engendrée par $\mathcal{P}(\Omega)$ est $\mathcal{P}(\Omega)$, celle engendrée par le singleton $\{\emptyset\}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ est $\mathcal{T}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \Omega\}$. Cette dernière est aussi $\mathcal{T}(\{\Omega\})$, celle engendrée par le singleton $\{\Omega\}$.

6. Soit $\mathcal{P}_d(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω qui sont au plus dénombrables. Soit $\mathcal{P}_{cd}(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega); \Omega \setminus A \in \mathcal{P}_d(\Omega)\}$ l'ensemble des complémentaires de parties au plus dénombrables. Montrer que $\mathcal{T}_d(\Omega) := \mathcal{P}_d(\Omega) \cup \mathcal{P}_{cd}(\Omega)$ est une tribu sur Ω .
7. Soit $\mathcal{S}(\Omega) = \{\{x\}; x \in \Omega\}$ l'ensemble des singletons de Ω . Montrer que $\mathcal{T}_d(\Omega) = \mathcal{T}(\mathcal{S}(\Omega))$. Montrer que la plus petite algèbre \mathcal{A} contenant $\mathcal{S}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω qui sont finies ou dont le complémentaire est fini.
8. On suppose que Ω est infini. Montrer qu'il contient une partie dénombrable D . En déduire que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_d(\Omega)$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{T}_d(\Omega)$ et que \mathcal{A} n'est pas une tribu.
9. Montrer que, si Ω est au plus dénombrable, alors $\mathcal{P}_d(\Omega) = \mathcal{P}_{cd}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$ donc $\mathcal{T}_d(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$.
10. On suppose que $\mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega) = \emptyset$. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{T}_d(\Omega)$, $A \notin \mathcal{P}_d(\Omega)$ ou $\Omega \setminus A \notin \mathcal{P}_d(\Omega)$. En déduire que Ω n'est ni fini ni dénombrable.
11. On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $A \in \mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega)$. Montrer que Ω est au plus dénombrable. (Indication : lorsque $A \neq \Omega$, on pourra considérer la famille des parties $A \cup \{a\}$ pour $a \notin A$).
12. Montrer que $\mathcal{T}_d(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$ si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $A \in \mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega)$ si et seulement si Ω est au plus dénombrable.
13. Que peut-on dire de $\mathcal{T}_d(\mathbb{R})$?

Exercice 37. : Soit $\Omega = [0; 1]$. Déterminer $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ pour $\mathcal{A} = \{[0; 1]\}$, pour $\mathcal{A} = \{\{0\}\}$, pour $\mathcal{A} = \{\{0\}; \{1\}\}$ et pour $\mathcal{A} = \{[0; 1/2]; \{1/3\}\}$.

Exercice 38. : Soit $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. On note par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu de Borel, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de \mathbb{R}^d (pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^d). C'est aussi la tribu engendrée par les fermés de \mathbb{R}^d .

1. Montrer que les ensembles $]0; 3[\cup]4; +\infty[$, $]0; 7[\cap]1; 9[$, $]0; 1[\cup]2; 3[$, $[0; 1] \cup]2; 3[$,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [3 + 1/n; n] \quad \text{et} \quad \bigcup_{x \in \mathbb{R}^*}]|x| - |x|^{-2}; |x| + |x|^{-2}[$$

sont des boréliens de \mathbb{R} (i.e. des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

2. Montrer que les ensembles $\{(0; 0)\}$, $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$,

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\} \cup \{(0; y); y \leq 0\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{(1/n; y); y \leq 0\}$$

sont des boréliens de \mathbb{R}^2 (i.e. des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

Exercice 39. : Soit X (resp. Y) un ensemble et \mathcal{T}_X (resp. \mathcal{T}_Y) une tribu sur X (resp. Y). Soit $f : X \longrightarrow Y$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T} = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{T}_Y\}$ est une tribu sur X . On la note $f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$. C'est l'image réciproque par f de la tribu \mathcal{T}_Y .
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}(f; \mathcal{T}_X) = \{B \subset Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X\}$ est une tribu sur Y . Vérifier que $\mathcal{T}_X = f^{-1}(\mathcal{T}(f; \mathcal{T}_X))$. Voir aussi la remarque ci-dessous.
3. Soit E une partie de Y . Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_Y|E = \{B \cap E; B \in \mathcal{T}_Y\}$ est la tribu $j^{-1}(\mathcal{T}_Y)$ sur E , pour l'application $j : E \longrightarrow Y$ donnée par $j(y) = y$. Montrer que $\mathcal{T}_Y|E$ contient $\mathcal{E}(E; \mathcal{T}_Y) = \{B \subset E; B \in \mathcal{T}_Y\}$. Montrer que, si $E \in \mathcal{T}_Y$, alors $\mathcal{E}(E; \mathcal{T}_Y) = \mathcal{T}_Y|E$ et $\mathcal{T}_Y|E \subset \mathcal{T}_Y$.
4. Soit A et E deux parties de Y telles que $A \not\subset E$, $E \not\subset A$, $(Y \setminus A) \not\subset E$ et $E \not\subset (Y \setminus A)$. Soit $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\{A\})$. Montrer que $E \notin \mathcal{T}_Y$, $\mathcal{E}(E; \mathcal{T}_Y) \neq \mathcal{T}_Y|E$ et $\mathcal{T}_Y|E \not\subset \mathcal{T}_Y$.
5. Montrer que $\mathcal{T} = \{A \times Y; A \in \mathcal{T}_X\}$ est une tribu sur $X \times Y$ et que $\mathcal{T} = j^{-1}(\mathcal{T}_X)$, pour $j : X \times Y \longrightarrow X$ donnée par $j(x; y) = x$.
6. Soit \mathcal{E} une partie de $\mathcal{P}(Y)$. On va montrer que l'on a $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E})) = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$, où $f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{E}\}$.
 - a). Montrer que si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(Y)$ alors $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset f^{-1}(\mathcal{G})$.
 - b). Montrer que $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$. En déduire que $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E}))$.
 - c). On considère la tribu \mathcal{T}' sur Y donnée par $\mathcal{T}' := \mathcal{T}(f; \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E})))$. Montrer que \mathcal{T}' contient \mathcal{E} . En déduire que $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{E}))$.
7. On suppose que f est constante égale à $y \in Y$. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) = \{\emptyset; X\}$ et que $\mathcal{T}(f; \mathcal{T}_X) = \mathcal{P}(Y)$.
8. On suppose que $X = Y = \mathbb{R}$ et que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, strictement monotone et surjective. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque : En général, $\{f(A); A \in \mathcal{T}_X\}$ n'est pas une tribu sur Y . En effet, soit, par exemple, $f : X \longrightarrow \{a; b\}$ la fonction constante égale à a et $b \neq a$, alors $\{f(A); A \in \mathcal{T}_X\} = \{\emptyset; \{a\}\}$ n'est pas stable par passage au complémentaire dans $\{a; b\}$. Ce n'est donc pas une tribu. Pour cet exemple, on a, pour toute tribu \mathcal{T} sur $\{a; b\}$, $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{\emptyset; X\}$ et $\mathcal{T}(f; \mathcal{T}_X) = \mathcal{P}(\{a; b\})$, par 7.

Exercice 40. : Topologie naturelle sur $\overline{\mathbb{R}}$. Tribu borélienne sur $\overline{\mathbb{R}}$. On note par $\tau(\mathbb{R})$ la topologie usuelle de \mathbb{R} (celle de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}; |\cdot|)$ où $|\cdot|$ désigne la fonction valeur absolue). On note par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur \mathbb{R} . C'est la tribu sur \mathbb{R} engendrée par $\tau(\mathbb{R})$.

1. Soit (X, τ) un espace topologique et E une partie de X . Montrer que l'ensemble $\tau_E = \{A \cap E; A \in \tau\}$ est une topologie sur E . On l'appelle la topologie sur E induite par τ .
2. Soit $\tau(\overline{\mathbb{R}})$ la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ engendrée par l'ensemble suivant de parties de $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\{]a; b[; (a; b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b\} \cup \{]a; +\infty[; a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty; a[; a \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $\tau(\mathbb{R})$ est la topologie sur \mathbb{R} induite par $\tau(\overline{\mathbb{R}})$. Montrer que $\{-\infty\}$ et $\{+\infty\}$ sont des fermés de $\overline{\mathbb{R}}$. En déduire que \mathbb{R} est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ (i.e. $\mathbb{R} \in \tau(\overline{\mathbb{R}})$).

3. La tribu borélienne $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ est la tribu sur $\overline{\mathbb{R}}$ engendrée par $\tau(\overline{\mathbb{R}})$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est donnée par $f(x) = x$. (Indication : on pourra utiliser le 2 et l'exercice 39.)
4. Soit $A \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$. On va montrer que $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ si et seulement si $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
 - a). Pour $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, montrer que $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Indication : on pourra utiliser 3.)
 - b). Soit $A \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ tel que $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ tel que $B \cap \mathbb{R} = A \cap \mathbb{R}$. En déduire que $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, puis que $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Exercice 41. : Soit Ω un ensemble. On dit qu'une partie non vide \mathcal{M} de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone sur Ω si les deux propriétés suivantes sont vérifiées.

- a). Si $(A; B) \in \mathcal{M}^2$ avec $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$;
- b). Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone sur Ω . Montrer qu'une tribu sur Ω est une classe monotone sur Ω .
2. Soit \mathcal{M} une classe monotone sur Ω . Vérifier que $\emptyset \in \mathcal{M}$. On considère $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de \mathcal{M} . Montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}.$$

(Indication : on pourra utiliser la suite $(B_0 \setminus B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.) Soit $(C_n)_{n \in D} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{M} , avec D fini ou dénombrable. Montrer que

$$\bigcup_{n \in D} C_n \in \mathcal{M}.$$

On suppose de plus que $\Omega \in \mathcal{M}$. Montrer que \mathcal{M} est stable par passage au complémentaire. En déduire que \mathcal{M} est une tribu.

3. Montrer qu'une intersection de classes monotones sur Ω est une classe monotone sur Ω .
Si $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$, on note par $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ la plus petite classe monotone sur Ω contenant \mathcal{A} . C'est l'intersection de toutes les classes monotones sur Ω contenant \mathcal{A} . D'après 1, on a donc $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$.
4. Soit \mathcal{M} une classe monotone sur Ω et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On pose

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{P}(\Omega); A \cap B \in \mathcal{M}\}.$$

Montrer que \mathcal{M}_A est une classe monotone sur Ω .

On remarque que $A \in \mathcal{M}_B$ si et seulement si $B \in \mathcal{M}_A$.

5. Vérifier que $\mathcal{M}_\Omega = \mathcal{M}$ et que $\mathcal{M}_\emptyset = \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}$, alors $\Omega \in \mathcal{M}_A$.
6. Soit \mathcal{C} une partie non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$, stable par intersection finie.

- a). Montrer que, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})_C$. En déduire que, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})_C$.
- b). En déduire que, pour tout $C \in \mathcal{C}$, pour tout $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $C \in \mathcal{M}(\mathcal{C})_B$. Montrer que, pour tout $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})_B$.
- c). Montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par intersection finie.
- d). On suppose que $\Omega \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ (c'est le cas si $\Omega \in \mathcal{C}$). Montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$.

Exercice 42. : Soit Ω un ensemble.

Soit $(A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. L'ensemble $B \setminus A = B \cap (\Omega \setminus A)$ est appelée la différence propre de B par A dans le cas où $A \subset B$.

Soit \mathcal{A} un ensemble de parties de Ω . On dit que \mathcal{A} est un σ -anneau sur Ω si

- a). $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- b). \mathcal{A} est stable par différence propre : pour tous A et B de \mathcal{A} vérifiant $A \subset B$, $B \setminus A \in \mathcal{A}$.
- c). \mathcal{A} est stable par réunion finie ou dénombrable : pour tout ensemble fini ou dénombrable J et toute famille $(A_j)_{j \in J}$ d'éléments de \mathcal{A} ,

$$\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}.$$

On dit que \mathcal{A} est un système de Dynkin sur Ω si \mathcal{A} vérifie les propriétés a) et b) précédentes et aussi la propriété

- c'). \mathcal{A} est stable par réunion finie ou dénombrable d'éléments deux à deux disjoints : pour tout ensemble fini ou dénombrable J et toute famille $(A_j)_{j \in J}$ d'éléments de \mathcal{A} telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$ dans J ,

$$\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}.$$

1. Vérifier qu'une tribu sur Ω est un σ -anneau sur Ω .
2. Vérifier que $\mathcal{P}_d(\Omega)$ (défini dans l'exercice 36) est un σ -anneau sur Ω .
3. Vérifier que $\mathcal{P}_d(\Omega)$ est une tribu si et seulement si Ω est un ensemble au plus dénombrable.
4. Soit \mathcal{A} un σ -anneau sur Ω . Montrer que \mathcal{A} est une tribu si et seulement si $\Omega \in \mathcal{A}$.
5. Soit \mathcal{A} un σ -anneau sur Ω et $E \in \mathcal{A}$. Vérifier que $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A}; A \subset E\}$ est une tribu sur E .
6. Soit \mathcal{A} un σ -anneau sur Ω . Soit J un ensemble fini ou dénombrable et $(A_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de \mathcal{A} . Montrer que

$$\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}.$$

(Indication : on pourra utiliser 4 avec $E = \bigcup_{j \in J} A_j$.)

7. Soit \mathcal{E} un ensemble de parties de Ω . Montrer qu'il existe un plus petit σ -anneau sur Ω contenant \mathcal{E} . On le note $\mathcal{S}(\mathcal{E})$.

8. Soit \mathcal{E} un ensemble de parties de Ω . Soit \mathcal{E}_d l'ensemble des parties B de Ω pour lesquelles il existe un ensemble fini ou dénombrable J et une famille d'éléments $(E_j)_{j \in J}$ de \mathcal{E} tels que

$$B \subset \bigcup_{j \in J} E_j \in \mathcal{A}.$$

Vérifier que \mathcal{E}_d est un σ -anneau sur Ω contenant \mathcal{E} .

9. Soit \mathcal{E} un ensemble de parties de Ω . Vérifier que toute partie $B \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ est contenu dans une réunion au plus dénombrable d'éléments de \mathcal{E} .
10. Soit \mathcal{A} est un σ -anneau sur Ω . Vérifier que \mathcal{A} est un système de Dynkin sur Ω .
11. Soit \mathcal{A} est un système de Dynkin sur Ω qui stable par intersection de deux éléments : pour tout $(A; B) \in \mathcal{A}^2$, $A \cap B \in \mathcal{A}$.
- 1). Montrer que, pour $(A; B) \in \mathcal{A}^2$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
 - 2). Montrer que, pour $(A; B) \in \mathcal{A}^2$, $A \cup B \in \mathcal{A}$.
 - 3). Soit J un ensemble fini ou dénombrable et $(A_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de \mathcal{A} . Montrer que

$$\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}.$$

(Indication : on écrira cette réunion comme une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.)

- 4). Montrer que \mathcal{A} est un σ -anneau sur Ω .
12. Soit \mathcal{E} un ensemble de parties de Ω . Montrer qu'il existe un plus petit système de Dynkin sur Ω contenant \mathcal{E} . On le note $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Vérifier que $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{E})$.
13. Soit \mathcal{E} un ensemble de parties de Ω qui est stable par intersection de deux éléments. On va montrer que $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{S}(\mathcal{E})$.
- 1). Pour $A \in \Omega$, soit $\mathcal{D}_A = \{E \in \mathcal{D}(\mathcal{E}); A \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}$. Montrer que \mathcal{D}_A est un système de Dynkin sur Ω contenu dans $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.
 - 2). Soit $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.
 - 3). Montrer que si $A \in \mathcal{E}$ et si $B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ alors $A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.
 - 4). Soit $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.
 - 5). Montrer que $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ est un σ -anneau sur Ω .
 - 6). En déduire que $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$. On a montré $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{S}(\mathcal{E})$ d'après 12.
 - 7). On suppose de plus que $\Omega \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$. Montrer que $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$.