Université de Cergy-Pontoise **2015-2016**
Approfondissements, S4.

Topologie de $\mathbb{R}$.

Exercice 36. : Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$

$$A_1 =]2;1[\ ,\ A_2 = \{0\}\ ,\ A_3 =]2;3[\ ,\ A_4 = [2;3[\ ,\ A_5 =]2;+\infty[\ ,\ A_6 = [2;+\infty[\ ,\ A_7 = \mathbb{Z}\ ,$$

$$A_8 = \{n^{-1};\ n \in \mathbb{N}^*\}\ ,\ A_9 = \{x+y;\ x \in A_7 \text{ et } y \in A_8\}\ ,\ A_{10} = A_4 \cup]3;4[\ ,$$

répondre aux questions suivantes :

1. La partie est-elle ouverte ? fermée ?
2. Quelle est son adhérence ? Quel est son intérieur ? Quelle est sa frontière ?
3. Quels sont ses points isolés ? Quels sont ses points d'accumulation ?

Exercice 37. : On considère les parties A, B, C de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A = \left\{-6-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{1-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{2\}\ ,\ C = \left\{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup [1;2[\ ,$$

$$B = \left\{-6-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{2-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

1. Calculer $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$. Vérifier que A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont deux à deux différents.
2. Calculer $\overline{C}$, $\mathring{\overline{C}}$, $\overline{\mathring{\overline{C}}}$. Vérifier que C, $\overline{C}$, $\mathring{\overline{C}}$ et $\overline{\mathring{\overline{C}}}$ sont deux à deux différents.
3. Trouver une partie D de $\mathbb{R}$ telle que D, $\mathring{D}$, $\overline{D}$, $\overline{\mathring{D}}$, $\overline{\mathring{\overline{D}}}$ sont deux à deux différents.

Exercice 38. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $O_n =]-n^{-1}; n^{-1}[$ et $F_n = \{n^{-1}\}$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, O_n est ouvert et F_n est fermé. L'intersection de tous les O_n est-elle ouverte ? La réunion de tous les F_n est-elle fermée ?

Exercice 39. : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et B son complémentaire dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathring{B} = \mathbb{R} \setminus \overline{A}$. On rappelle que l'extérieur de A est $\mathring{B}$ et que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Quel est l'intérieur de $\mathbb{Q}$? Quelle est la frontière de $\mathbb{Q}$? Quel est l'extérieur de $\mathbb{Q}$?

Exercice 40. : Soit Ω un ouvert non vide inclus dans $]0;+\infty[$.

1. On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq A$,

$$\lambda\Omega := \{\lambda x;\ x \in \Omega\} \subset \Omega\,. \tag{8}$$

   Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $[M;+\infty[\subset \Omega$.

2. On suppose qu'il existe $B > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in]0; B]$, on ait (8). Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $]0; m] \subset \Omega$.

Exercice 41. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (cf. exercice 20). Si I appartient à la collection $\mathcal{C}$, définie dans le cours, I est un ouvert, par définition. On montre ici qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$ appartient forcément à la collection $\mathcal{C}$.
Comme $\mathbb{R}$ est dans $\mathcal{C}$, on peut se limiter au cas où $I \neq \mathbb{R}$. D'après la forme des éléments de $\mathcal{C}$ et l'exercice 20, il suffit de montrer que si I a une extrémité finie (i.e. dans $\mathbb{R}$) alors I ne la contient pas. Les extémités de I sont $\inf I$ et $\sup I$. Il suffit donc de montrer les propositions ($\inf I \in \mathbb{R} \Longrightarrow \inf I \notin I$) et ($\sup I \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sup I \notin I$).
Dans cet exercice on montre seulement la seconde par l'absurde. On peut traiter la première de manière similaire.
On suppose que $b = \sup I \in \mathbb{R}$. Si $b = \sup I \in I$, montrer qu'alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y - b| < \delta$ et $y \notin I$. En déduire une contradiction avec le fait que I est ouvert.

Exercice 42. : Soit U une partie de $\mathbb{R}$. On montre que U est ouvert si et seulement si la proposition suivante est vraie :

$$\mathcal{P} \;=\; \big(\forall x \in U\,,\, \exists \delta > 0\,;\;]x - \delta; x + \delta[\subset U\big)\,.$$

1. On suppose $\mathcal{P}$ vraie. Donc, pour tout $x \in U$, il existe $\delta_x > 0$ tel que $]x-\delta_x; x+\delta_x[\subset U$. Montrer que
$$U \;=\; \bigcup_{x \in U}]x - \delta_x; x + \delta_x[\,.$$
En déduire que U est ouvert.
2. On suppose maintenant que U est ouvert. Il existe donc une famille $(I_b)_{b\in B}$ d'intervalles de $\mathcal{C}$ (collection définie dans le cours) telle que
$$U \;=\; \bigcup_{b \in B} I_b\,.$$
Soit $x \in U$. Il existe donc $b \in B$ tel que $x \in I_b$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\subset I_b$. En déduire que $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 43. : L'objectif de cet exercice est de montrer que $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont les seules parties de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouvertes et fermées.

1. Vérifier que $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont ouverts et fermés.
2. On suppose que U est une partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}$ telle que $U \neq \emptyset$ et $U \neq \mathbb{R}$. On note par V le complémentaire de U dans $\mathbb{R}$. Vérifier que V est une partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}$ telle que $V \neq \emptyset$ et $V \neq \mathbb{R}$.
3. Soit $a \in U$ et $b \in V$. On a $a \neq b$. On suppose que $a < b$. Montrer que $F_U = U \cap [a; b]$ et $F_V = V \cap [a; b]$ sont des fermés bornés de $\mathbb{R}$.
4. Soit $c = \sup F_U$ (on a $c \in [a; b]$). Montrer que $c \in F_U$. En déduire que $c \notin F_V$ et que $c < b$.

5. Montrer que $]c;b] \subset F_V$.
6. Montrer que c appartient à $\overline{F_V}$, l'adhérence de F_V.
7. Trouver une contradiction.

Exercice 44. : On dit qu'une partie B de $\mathbb{R}$ a la propriété de Borel-Lebesgue si, pour toute collection $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'ouverts U_α de $\mathbb{R}$ telle que

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha , \tag{9}$$

on peut trouver un sous-ensemble fini F de A tel que

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha . \tag{10}$$

L'objectif de l'exercice est de montrer qu'une partie B ayant la propriété de Borel-Lebesgue est forcément fermée et bornée. On considère donc une telle partie B.

1. Montrer que
$$B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n;n[.$$
En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset]-N;N[$ et que B est bornée.
2. On suppose que B n'est pas fermée. Donc $A = \mathbb{R} \setminus B$ n'est pas ouvert. Montrer qu'il existe un $a \in A$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \left]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right[\not\subset A . \tag{11}$$
3. Montrer que
$$B \subset \mathbb{R} \setminus \{a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R} \setminus \left[a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right] .$$
4. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset \mathbb{R} \setminus [a - N^{-1}; a + N^{-1}]$.
5. En déduire une contradiction avec (11).

Exercice 45. : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit qu'une partie B incluse dans A est *ouverte dans* A s'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que $B = U \cap A$. On dit qu'une partie C incluse dans A est *fermée dans* A s'il existe un fermé F de $\mathbb{R}$ tel que $C = F \cap A$.

1. Vérifier que $\emptyset$ et A sont ouverts dans A et fermés dans A.
2. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de A qui sont ouvertes dans A. Montrer que la réunion de ces parties est aussi ouverte dans A.
3. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties de A qui sont fermées dans A. Montrer que l'intersection de ces parties est aussi fermée dans A.
4. Soit B une partie ouverte dans A. Vérifier que $A \setminus B$ est fermée dans A.
5. Soit C une partie fermée dans A. Vérifier que $A \setminus C$ est ouverte dans A.
6. Soit $A =]0;2]$, $V =]0;1]$, $W =]0;1[$, $X = [1;2[$. La partie V est-elle ouverte dans A ? Est-elle fermée dans A ? Mêmes questions pour W et X.