

Topologie de \mathbb{R} .

Exercice 41. : Vrai ou faux ? Justifier toute réponse.

1. \mathbb{R} est un voisinage de 7.
2. $] - \infty; 0]$ est un voisinage de 7.
3. $] - 2; 8[$ est un voisinage ouvert de 7.
4. $] - 2; 8]$ est un voisinage de 7.
5. $] - 2; 7]$ est un voisinage de 7.
6. L'ensemble A donné par

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] 7 - \frac{1}{n}; 7 + \frac{1}{n} \right[$$

est un voisinage de 7.

7. L'ensemble B donné par

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] 7 - \frac{1}{n}; 7 + \frac{1}{n} \right[$$

est un voisinage de 7.

Exercice 42. : Pour chacune des parties de \mathbb{R}

$$A_1 =]2; 1[, A_2 = \{0\}, A_3 =]2; 3[, A_4 = [2; 3[, A_5 =]2; +\infty[, A_6 = [2; +\infty[, A_7 = \mathbb{Z},$$

$$A_8 = \{n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}, A_9 = \{x + y; x \in A_7 \text{ et } y \in A_8\}, A_{10} = A_4 \cup]3; 4[,$$

répondre aux questions suivantes :

1. La partie est-elle ouverte ? fermée ?
2. Quelle est son adhérence ? Quel est son intérieur ? Quelle est sa frontière ?
3. Quels sont ses points isolés ? Quels sont ses points d'accumulation ?

Exercice 43. : On considère les parties A, B, C de \mathbb{R} suivantes :

$$A = \left\{ -6 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ 1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{2\}, C = \left\{ -\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup [1; 2[,$$

$$B = \left\{ -6 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ 2 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Calculer \overline{A} , \overline{B} , $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$. Vérifier que A , B , \overline{A} , \overline{B} , $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont deux à deux différents.
2. Calculer \overline{C} , $\overset{\circ}{\overline{C}}$, $\overline{\overset{\circ}{C}}$. Vérifier que C , \overline{C} , $\overset{\circ}{\overline{C}}$ et $\overline{\overset{\circ}{C}}$ sont deux à deux différents.
3. Trouver une partie D de \mathbb{R} telle que D , $\overset{\circ}{D}$, \overline{D} , $\overline{\overset{\circ}{D}}$ sont deux à deux différents.

Exercice 44. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $O_n =]-n^{-1}; n^{-1}[$ et $F_n = \{n^{-1}\}$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, O_n est ouvert et F_n est fermé. L'intersection de tous les O_n est-elle ouverte? La réunion de tous les F_n est-elle fermée?

Exercice 45. : Soit A une partie de \mathbb{R} et B son complémentaire dans \mathbb{R} . Montrer que $\overset{\circ}{B} = \mathbb{R} \setminus \overline{A}$. On rappelle que l'extérieur de A est $\overset{\circ}{B}$ et que \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} . Quel est l'intérieur de \mathbb{Q} ? Quelle est la frontière de \mathbb{Q} ? Quel est l'extérieur de \mathbb{Q} ?

Exercice 46. : Soit Ω un ouvert non vide inclus dans $]0; +\infty[$.

1. On suppose qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq A$,

$$\lambda\Omega := \{\lambda x; x \in \Omega\} \subset \Omega. \quad (9)$$

Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $[M; +\infty[\subset \Omega$.

2. On suppose qu'il existe $B > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in]0; B]$, on ait (9). Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $]0; m] \subset \Omega$.

Exercice 47. : Soit I un intervalle de \mathbb{R} (cf. exercice 23). Si I appartient à la collection \mathcal{C} , définie dans le cours, I est un ouvert, par définition. On montre ici qu'un intervalle de \mathbb{R} qui est aussi un ouvert de \mathbb{R} appartient forcément à la collection \mathcal{C} .

Soit I un intervalle de \mathbb{R} qui est un ouvert dans \mathbb{R} . Comme \mathbb{R} est dans \mathcal{C} , on peut se limiter au cas où $I \neq \mathbb{R}$. D'après la forme des éléments de \mathcal{C} et l'exercice 23, il suffit de montrer que si I a une extrémité finie (i.e. dans \mathbb{R}) alors I ne la contient pas. Les extrémités de I sont $\inf I$ et $\sup I$. Il suffit donc de montrer les propositions ($\inf I \in \mathbb{R} \implies \inf I \notin I$) et ($\sup I \in \mathbb{R} \implies \sup I \notin I$).

Dans cet exercice on montre seulement la seconde par l'absurde. On peut traiter la première de manière similaire.

On suppose que $b = \sup I \in \mathbb{R}$. Si $b = \sup I \in I$, montrer qu'alors, pour tout $\delta > 0$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y - b| < \delta$ et $y \notin I$. En déduire une contradiction avec le fait que I est ouvert.

Exercice 48. : Soit U une partie de \mathbb{R} . On montre que U est ouvert si et seulement si la proposition suivante est vraie :

$$\mathcal{P} = (\forall x \in U, \exists \delta > 0;]x - \delta; x + \delta[\subset U).$$

1. On suppose \mathcal{P} vraie. Donc, pour tout $x \in U$, il existe $\delta_x > 0$ tel que $]x - \delta_x; x + \delta_x[\subset U$. Montrer que

$$U = \bigcup_{x \in U}]x - \delta_x; x + \delta_x[.$$

En déduire que U est ouvert.

2. On suppose maintenant que U est ouvert. Il existe donc une famille $(I_b)_{b \in B}$ d'intervalles de \mathcal{C} (collection définie dans le cours) telle que

$$U = \bigcup_{b \in B} I_b.$$

Soit $x \in U$. Il existe donc $b \in B$ tel que $x \in I_b$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]x - \delta; x + \delta[\subset I_b$. En déduire que \mathcal{P} est vraie.

Exercice 49. : L'objectif de cet exercice est de montrer que \emptyset et \mathbb{R} sont les seules parties de \mathbb{R} qui sont à la fois ouvertes et fermées.

1. Vérifier que \emptyset et \mathbb{R} sont ouverts et fermés.
2. On suppose que U est une partie ouverte et fermée de \mathbb{R} telle que $U \neq \emptyset$ et $U \neq \mathbb{R}$. On note par V le complémentaire de U dans \mathbb{R} . Vérifier que V est une partie ouverte et fermée de \mathbb{R} telle que $V \neq \emptyset$ et $V \neq \mathbb{R}$.
3. Soit $a \in U$ et $b \in V$. On a $a \neq b$. On suppose que $a < b$. Montrer que $F_U = U \cap [a; b]$ et $F_V = V \cap [a; b]$ sont des fermés bornés de \mathbb{R} .
4. Soit $c = \sup F_U$ (on a $c \in [a; b]$). Montrer que $c \in F_U$. En déduire que $c \notin F_V$ et que $c < b$.
5. Montrer que $]c; b] \subset F_V$.
6. Montrer que c appartient à $\overline{F_V}$, l'adhérence de F_V .
7. Trouver une contradiction.

Exercice 50. : On dit qu'une partie B de \mathbb{R} a la propriété de Borel-Lebesgue si, pour toute collection $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'ouverts U_α de \mathbb{R} telle que

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \tag{10}$$

on peut trouver un sous-ensemble fini F de A tel que

$$B \subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha. \tag{11}$$

L'objectif de l'exercice est de montrer qu'une partie B ayant la propriété de Borel-Lebesgue est forcément fermée et bornée. On considère donc une telle partie B .

1. Montrer que

$$B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n; n[.$$

En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset]-N; N[$ et que B est bornée.

2. On suppose que B n'est pas fermée. Donc $A = \mathbb{R} \setminus B$ n'est pas ouvert. Montrer qu'il existe un $a \in A$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left] a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n} \right[\not\subset A. \tag{12}$$

3. Montrer que

$$B \subset \mathbb{R} \setminus \{a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R} \setminus \left[a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n} \right].$$

4. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset \mathbb{R} \setminus [a - N^{-1}; a + N^{-1}]$.

5. En déduire une contradiction avec (12).

Exercice 51. : Topologie induite.

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On dit qu'une partie B incluse dans A est *ouverte dans* A s'il existe un ouvert U de \mathbb{R} tel que $B = U \cap A$. On dit qu'une partie C incluse dans A est *fermée dans* A s'il existe un fermé F de \mathbb{R} tel que $C = F \cap A$.

1. Vérifier que \emptyset et A sont ouverts dans A et fermés dans A .
2. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de A qui sont ouvertes dans A . Montrer que la réunion de ces parties est aussi ouverte dans A .
3. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties de A qui sont fermées dans A . Montrer que l'intersection de ces parties est aussi fermée dans A .
4. Soit B une partie ouverte dans A . Vérifier que $A \setminus B$ est fermée dans A .
5. Soit C une partie fermée dans A . Vérifier que $A \setminus C$ est ouverte dans A .
6. Soit $A =]0; 2]$, $V =]0; 1]$, $W =]0; 1[$, $X = [1; 2[$. La partie V est-elle ouverte dans A ? Est-elle fermée dans A ? Mêmes questions pour W et X .
7. Soit $A =]0; 2] \cup [3; 4[$. Montrer que $V = [3; 4[$ est ouverte et fermée dans A .