Université de Cergy-Pontoise **2019-2020**
Calcul intégral, S5.

Mesures.

Exercice 43. : Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}_0$ la tribu grossière sur Ω et A une partie non vide et stricte de Ω.

1. Soit $m \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Combien y-a-t-il de mesure positive μ sur $\mathcal{T}_0$ telle que $\mu(\Omega) = m$?
2. Déterminer $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A} = \{A\}$.
3. Soit $m \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Déterminer les mesures positives μ sur $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ telles que $\mu(\Omega) = m$.
4. Soit card : $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ qui, à $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, associe son cardinal. Montrer que card est une mesure positive.
5. Soit $\omega \in \Omega$. L'application $\delta_\omega : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ qui, à $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, associe $\delta_\omega(A) = 1$ si $\omega \in A$ et $\delta_\omega(A) = 0$ sinon, est une mesure positive sur Ω.

Exercice 44. : Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω. Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Soit μ et ν deux mesures positives sur $\mathcal{T}$. Montrer que $\mu + \lambda\nu$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω telle que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Montrer que la restriction à $\mathcal{T}'$ d'une mesure μ sur $\mathcal{T}$ est une mesure sur $\mathcal{T}'$.

Exercice 45. : Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, soit $\mu = \delta_0 + 2\delta_1 + 5\delta_{\sqrt{2}}$, ν la mesure de comptage et $\nu_{\mathbb{Z}}$ la mesure de comptage des éléments de $\mathbb{Z}$ définie par, pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\nu_{\mathbb{Z}}(A) = \mathrm{card}(A \cap \mathbb{Z})$. Déterminer $\mu(P)$, $\nu(P)$ et $\nu_{\mathbb{Z}}(P)$, pour P donné successivement par les ensembles :

$$A = [0;1[\,, \quad B = \mathbb{R}^-\,, \quad C = \mathbb{Q}\,, \quad D = \{2;3;4\}\,, \quad D = \{-2;\sqrt{2}\}\,.$$

Exercice 46. : Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\omega_1;\cdots;\omega_n) \in \Omega^n$, $(\lambda_1;\cdots;\lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Montrer que l'application $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, définie par
$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \delta_{\omega_k}(A)\,,$$
est une mesure positive finie sur $\mathcal{T}$.
2. Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω, soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Montrer que l'application $\nu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, définie par
$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \delta_{\omega_n}(A)\,,$$
est une mesure positive sur $\mathcal{T}$. À quelle condition est-elle finie ?

Exercice 47. : On se place dans le cadre de l'exercice 39.

1. On suppose $f : X \longrightarrow Y$ surjective. Soit μ_Y une mesure positive sur $\mathcal{T}_Y$. Montrer que $\nu : f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ donnée par $\nu(f^{-1}(B)) = \mu_Y(B)$ est bien définie et est une mesure positive sur la tribu $f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$ de X.
2. Soit μ_X une mesure positive sur $\mathcal{T}_X$. Montrer que $\tau : \mathcal{T}(f; \mathcal{T}_X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par $\tau(B) = \mu_X(f^{-1}(B))$ est une mesure positive sur la tribu $\mathcal{T}(f; \mathcal{T}_X)$ de Y.
3. Soit $E \in \mathcal{T}_X$. On rappelle que $\mathcal{T}_X|E = \{B \cap E; B \in \mathcal{T}_X\} = \{B \subset E; B \in \mathcal{T}_X\}$ est une tribu sur E qui est incluse dans $\mathcal{T}_X$. Vérifier que la restriction $(\mu_X)_{|E}$ de μ_X à $\mathcal{T}_X|E$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}_X|E$.
4. Soit E une partie de Y et $\mathcal{T}_Y|E = \{B \cap E; B \in \mathcal{T}_Y\}$. Vérifier que $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}(j; \mathcal{T}_Y|E)$, où l'application $j : E \longrightarrow Y$ est donnée par $j(y) = y$. Soit μ_E une mesure positive sur $\mathcal{T}_Y|E$. Montrer que la mesure τ du 2, avec f remplacée par j et μ_X remplacée par μ_E, est une extension de la mesure positive $\mathcal{T}_Y \ni B \mapsto \mu_E(B \cap E)$.
5. Soit $j : X \times Y \longrightarrow X$ donnée par $j(x; y) = x$. On pose $\mathcal{T}_p = j^{-1}(\mathcal{T}_X)$. Vérifier que $\mathcal{T}(j; \mathcal{T}_p) = \mathcal{T}_X$. Soit μ_X une mesure positive sur $\mathcal{T}_X$. Montrer que la mesure ν du 1, avec f remplacée par j et μ_Y remplacée par μ_X, est donnée par, pour $A \in \mathcal{T}_X$, $\nu(A \times Y) = \mu_X(A)$. Montrer que la mesure τ du 2, avec f remplacée par j et μ_X remplacée par ν, est μ_X.
6. Soit $Y = \{0; 1\}$, $\mathcal{T}_Y = \mathcal{P}(Y)$ et $\mu_Y = \delta_0$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ la fonction constante égale à 1. Trouver $(B; B') \in \mathcal{T}_Y^2$ tel que $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$ et $\mu_Y(B) \neq \mu_Y(B')$. Dans ce cas, on ne peut procéder à la construction de la mesure ν du 1.

Exercice 48. : Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et μ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. On rappelle qu'une partie N de Ω est dite μ-négligeable s'il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

1. Soit $(A; B) \in \mathcal{T}^2$ tel que $A \subset B$. Montrer que $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Donner un exemple de $(\Omega; \mathcal{T}; \mu)$ et de $(A; B) \in \mathcal{T}^2$ tel que l'on ait $A \subset B$, $A \neq B$ et $\mu(A) = \mu(B)$.
3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$. Montrer que
$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu\big(A_n\big) .$$
4. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_p) < +\infty$. Montrer que
$$\mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu\big(A_n\big) .$$
5. Dans $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}); \lambda)$, donner un exemple de suite décroissante $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont l'intersection est vide et telle que $\lim \lambda(A_n) > 0$.
6. Soit N et N' deux parties μ-négligeables de Ω. Montrer que $N \cup N'$ est μ-négligeable.
7. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments μ-négligeables de $\mathcal{T}$. Montrer que $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est μ-négligeable.

8. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ converge dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$.
9. Vérifier que la famille $\mathcal{T}_\mu = \{A \cup N; A \in \mathcal{T}, N\ \mu\text{-négligeable}\}$ de parties de Ω est une tribu sur Ω, qui contient $\mathcal{T}$.
10. Soit $\tilde{\mu} : \mathcal{T}_\mu \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ donnée par, pour $B \in \mathcal{T}_\mu$, $\tilde{\mu}(B) = \mu(A)$, où $B = A \cup N$ avec $A \in \mathcal{T}$ et N μ-négligeable. Vérifier que $\tilde{\mu}$ est bien définie et est une mesure positive sur $\mathcal{T}_\mu$, qui prolonge μ.

Exercice 49. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, vérifier que $\mu(\{a\}) = 0$.
2. Déterminer $\lambda(\{n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\})$, $\lambda(\mathbb{Z})$, $\lambda(\mathbb{Q})$.
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminer les mesures $\lambda(]a; a+\pi[)$, $\lambda([a; a+\pi[)$, $\lambda(]a; a+\pi])$, $\lambda([a; a+\pi])$ et $\lambda(]a; +\infty[)$.
4. Contruire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres strictements positifs telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ et un borélien F, qui est une réunion dénombrable de segments deux à deux disjoints et qui est de mesure de Lebesgue 1.

Exercice 50. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour une mesure positive μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on dit qu'une partie N de $\mathbb{R}$ est négligeable pour μ, ou μ-négligeable, s'il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

1. Montrer que, pour tout ouvert non vide O de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(O) > 0$. Donner une partie infinie et fermée F de $\mathbb{R}$ telle que $\lambda(F) = 0$.
2. Montrer que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(K) < +\infty$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et λ-pp nulle. Montrer que f est nulle.
4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe une partie λ-négligeable N de $\mathbb{R}$ telle que les fonctions f et $\mathbb{1}_{[0;1]}$ coïncident sur $\mathbb{R} \setminus N$.
   a). Montrer qu'il existe $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 1$.
   b). Montrer que $\lambda(f^{-1}(]0; 1[)) > 0$.
   c). En déduire une contradiction.
5. Soit $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la mesure positive donnée par
$$\mu(A) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{1/n}(A)\ .$$
   Trouver une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f et $\mathbb{1}_{[0;1]}$ coïncident sur $\mathbb{R} \setminus N$, où N est une partie μ-négligeable de $\mathbb{R}$.
6. Même question avec $\mathbb{1}_{[0;1]}$ remplacée par $\mathbb{1}_{[0;1/2]}$.

Exercice 51. : Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, on ait $\mu(K) < +\infty$. Soit $F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F_\mu(x) = \mu(]0; x])$, pour $x \geq 0$, et par $F_\mu(x) = \mu(]x; 0])$, pour $x < 0$.

1. Déterminer F_{δ_1}, F_{δ_0} et F_λ, où λ est la mesure de Lebesgue.

2. Montrer que, pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, $\mu(]a;b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$. En déduire que F_μ est croissante et qu'en tout point $a \in \mathbb{R}$, elle est continue à droite, admet une limite à gauche finie, notée $F_\mu(a^-)$, et $\mu(\{a\}) = F_\mu(a) - F_\mu(a^-)$.
3. On dit qu'un réel a est un atome de μ si $\mu(\{a\}) > 0$. Soit D_μ l'ensemble des atomes de μ. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\mu(\{a\}))_{a \in D_\mu \cap [-n;n]}$ est sommable. En déduire que D_μ est au plus dénombrable.
4. Soit $\mu_d : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par
$$\mu_d(A) \; = \; \sum_{a \in A \cap D_\mu} \mu\big(\{a\}\big) \, .$$
Montrer que μ_d est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vérifier qu'il existe une mesure positive μ_c sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu = \mu_c + \mu_d$ et μ_c n'a pas d'atome.
5. Soit $\epsilon > 0$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction impaire, définie par $f(x) = 0$ si $0 \leq x \leq \epsilon$ et par $f(x) = x - \epsilon$ si $x > \epsilon$. Soit μ_1 la mesure τ obtenue au 2 de l'exercice 47 avec X remplacé par $\mathbb{R}$, Y remplacé par $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_X$ remplacée par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ_X remplacée par λ. Vérifier que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}(f; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit μ la restriction de μ_1 à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vérifier que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\mu(K) < +\infty$. Déterminer explicitement F_μ. Donner explicitement une décomposition du type du 4 pour μ.

Exercice 52. : Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

a). $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b). Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

c). Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$,
$$\bigcup_{i \in I} A_i \; \in \; \mathcal{A} \, .$$

d). Pour tout $a \in \Omega$, $\{a\} \in \mathcal{A}$.

Soit $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une application vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$, pour tout $a \in \Omega$, $\mu(\{a\}) = 0$, et, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$,
$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \; = \; \sum_{i \in I} \mu(A_i) \, ,$$
où le dernier terme est la somme de la famille $(\mu(A_i))_{i \in I}$ d'éléments positifs.
Montrer que μ est nulle.
Remarque : Cet exercice permet de comprendre pourquoi on a imposé la stabilité par réunion *dénombrable* dans la définition des tribus et l'additivité *dénombrable* dans la définition des mesures.
En effet, prenons $\Omega = \mathbb{R}$ et essayons de construire une application $\nu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ (avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$) qui soit une extension de la notion de longueur pour les intervalles. Une telle ν doit pouvoir mesurer les singletons et valoir zéro sur chacun d'eux donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{a\} \in \mathcal{C}$ et $\nu(\{a\}) = 0$.

Si l'on impose à $(\mathcal{C};\nu)$ les conditions imposées dans l'exercice à $(\mathcal{A};\mu)$, ce qui est raisonnable si l'on souhaite retirer la condition de dénombrabilité dans les définitions de tribu et de mesure, on tombe sur $\nu = 0$!
En imposant cette condition de dénombrabilité dans les définitions de tribu et de mesure, le cours a réussi à construire une extension de la notion de longueur pour les intervalles, c'est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Borel.

Exercice 53. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R};\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sur $[0;1[$, on considère la relation $\mathcal{R}$ donnée par $x\mathcal{R}y$ si $x-y \in \mathbb{Q}$. On va vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On note par $\bar{x}$ la classe de $x \in [0;1[$ pour la relation $\mathcal{R}$. On admet que, par l'axiome du choix, il existe un ensemble $F \subset [0;1[$ tel que, pour chaque classe X, il existe un unique $x \in F$ tel que $X = \bar{x}$. Pour $q \in \mathbb{Q}$, on définit les ensembles $F+q$ et M par

$$F \,+\, q \;=\; \big\{x+q\,;\; x \in F\big\}$$

et par

$$M \;=\; \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1;1]} \big(F \,+\, q\big)$$

respectivement. On va montrer que F n'est pas borélien (i.e. $F \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer les inclusions $[0;1[\subset M \subset [-1;2]$.
3. Montrer que, si $(q;q') \in \mathbb{Q}^2$ et $q \neq q'$, alors $(F+q)\cap(F+q') = \emptyset$.
4. On suppose que $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(M) \in \{0;+\infty\}$. Établir une contradiction.

Exercice 54. : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}_d$ la tribu sur Ω définie dans l'exercice 36. Soit $\mu : \mathcal{T}_d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par $\mu(A) = 0$ si $A \in \mathcal{P}_d(\Omega)$ et $\mu(A) = 1$ sinon.

1. Soit $(A;B) \in \mathcal{T}_d$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que la proposition ($A \notin \mathcal{P}_d(\Omega)$ et $B \notin \mathcal{P}_d(\Omega)$) est fausse.
2. Vérifier que μ est une mesure.
3. Montrer que $\mu = 0$ si et seulement si $\mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega) \neq \emptyset$.
4. On suppose que $\mathcal{P}_d(\Omega) \cap \mathcal{P}_{cd}(\Omega) = \emptyset$. Vérifier que $\mu(\Omega) = 1$.

Exercice 55. : On utilise les notions et les notations de l'exercice 41.
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Soit μ et ν deux mesures positives sur $\mathcal{T}$. On suppose qu'il existe une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{T}$, qui contient Ω et qui est stable par passage au complémentaire et par réunion finie, telle que, pour $C \in \mathcal{C}$, $\mu(C) = \nu(C)$.

1. Soit $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{T}; \mu(A) = \nu(A)\}$. Vérifier que $\mathcal{M}$ est une classe monotone vérifiant $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$.
2. On suppose de plus que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$. Montrer que $\mu = \nu$.
3. Application : montrer que deux mesures positives sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$), qui coïncident sur les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^d$, sont en fait égales.

Exercice 56. : On utilise les notions, les notations et les résultats de l'exercice 42.
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Soit μ et ν deux mesures positives sur $\mathcal{T}$. On suppose qu'il existe une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{T}$, qui est stable par intersection finie, telle que, pour $E \in \mathcal{E}$, $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$. On va montrer qu'alors $\mu = \nu$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$. .

1. Vérifier que $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, le σ-anneau engendré par $\mathcal{E}$, vérifie $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}$.
2. On suppose μ et ν bornées (i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$ et $\nu(\Omega) < +\infty$).
   a). Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties E de $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ telles que $\mu(E) = \nu(E)$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un système de Dynkin qui contient $\mathcal{E}$.
   b). En déduire que $\mathcal{D} = \mathcal{S}(\mathcal{E})$.
3. On ne suppose plus que les mesures μ et ν soient bornées. Soit $A \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$. D'après l'exercice 42, on sait qu'il existe une famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
   a). Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\mathcal{S}_n = \{E \cap E_n; E \in \mathcal{S}(\mathcal{E})\}$ est le σ-anneau engendré par $\mathcal{E}_n = \{E \cap E_n; E \in \mathcal{E}\}$.
   b). Pour le même $n \in \mathbb{N}$, soit μ_n et ν_n les restrictions à E_n de μ et ν, respectivement. Vérifier que μ_n et ν_n sont bornées. En déduire que $\mu_n = \nu_n$.
   c). En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n)$.
   d). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ et on considère la proposition $\mathcal{P}(n) = (\mu(A \cap F_n) = \nu(A \cap F_n))$. Montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   e). En déduire que $\mu(A) = \nu(A)$. (Indication : on pourra vérifier que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et utiliser l'exercice 48.)
4. En déduire que μ et ν coïncident sur $\mathcal{S}(\mathcal{E})$. (Par l'exercice 42, on sait que $\mathcal{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.)
5. On suppose de plus que $\Omega \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ et que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer que $\mu = \nu$.