Séries à termes positifs.

Exercice 33. : Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 1\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-3/2}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^{3/2}}\,,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\bigl(1+3n^{-2}\bigr)\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n}{n!}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \bigl(\ln(n+1)-\ln n\bigr)^n\,,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2+(-1)^n}{n+1}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \bigl((-2)^n\ +\ 3^n\bigr)\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\Bigl(\frac{n^{7/2}+5n^{5/2}+7n}{\sqrt{n}(n^3+2n^2+1)}\Bigr)\,.$$

Exercice 34. : Montrer la finitude et calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^{n-1}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} n\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^{n-1}\,.$$

Exercice 35. : Développement dans une base avec application à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et à la non dénombrabilité de l'intervalle $[0;1[$ de $\mathbb{R}$.
Soit $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 2$ (la base) et $C_b = \{0;1;\cdots;b-1\}$ (l'ensemble des chiffres). Soit S l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in C_b$. Soit $f : S \longrightarrow [0;1]$ définie par

$$f(a)\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}\,. \tag{3}$$

1. Vérifier que f est bien définie, c'est-à-dire que la série dans (3) est convergente et que sa somme appartient à $[0;1]$. Montrer que $0 \in f(S)$ et $1 \in f(S)$. Montrer que $1/b$ a deux antécédents par f. En particulier, f n'est pas injective.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $t \in S$. Montrer que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t_n}{b^n}\ \leq\ \frac{1}{b^p}\,. \tag{4}$$

   On suppose maintenant qu'il existe $n \geq p+1$ tel que $t_n \neq b-1$. Soit k le plus petit entier n vérifiant cette propriété. Montrer que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}\ \leq\ \frac{1}{3^p}\ -\ \frac{1}{3^k}\,. \tag{5}$$

3. Montrer que (4) est une égalité si et seulement si, pour $n \geq p+1$, $t_n = b-1$.

4. Pour $(s,t) \in S^2$ tel que $s \neq t$. Soit k le premier entier $n \geq 1$ tel que $s_n \neq t_n$. On note $s \prec t$ si $s_k < t_k$. Montrer que, si $s \prec t$, alors $f(s) \leq f(t)$. Montrer que, si $f(s) < f(t)$, alors $s \prec t$. Montrer la fausseté de l'implication
$$s \prec t \implies f(s) \; < \; f(t) \; .$$
5. Soit $x \in [0;1[$. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par $a_1 = E(bx)$ et, pour $k > 1$,
$$a_k \; = \; E\biggl(b^k\Bigl(x - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{b^n}\Bigr)\biggr) \; .$$
Montrer, par récurrence sur $k \geq 1$, la propriété
$$\mathcal{P}(k) \; = \; \Bigl(a_k \in C_b \quad \text{et} \quad b^k\Bigl(x - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{b^n}\Bigr) \; \in \; [0;1[\Bigr) \; .$$
En déduire que $a \in S$ et que $x = f(a)$. Montrer que f est surjective.
6. Soit $(s,t) \in S$ tel que $s \neq t$ et $f(s) = f(t)$. Soit k le premier entier $n \geq 1$ tel que $s_n \neq t_n$. On a donc $s_k \neq t_k$. Par exemple, $s_k < t_k$. Montrer que $s_k = t_k + 1$ et que, pour tout $n \geq k+1$, $s_n = 0$ et $t_n = b - 1$.
7. Soit $(s,t) \in S$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour $1 \leq n < k$, $s_n = t_n$, $s_k = t_k + 1$ et que, pour tout $n \geq k+1$, $s_n = 0$ et $t_n = b-1$. Montrer que $s \neq t$ et $f(s) = f(t)$.
8. Soit S_0 le sous-ensemble de S formé des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que l'ensemble
$$A \; = \; \bigl\{n \in \mathbb{N}^* \, ; \; a_n \; < \; b - 1\bigr\}$$
est infini. Montrer que $f_0 : S_0 \longrightarrow [0;1[$, définie par $f_0(a) = f(a)$, est bijective.
9. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. On pose $x = t - E(t) \in [0;1[$. Montrer qu'il existe un rationnel dans l'intervalle $]x - \epsilon; x + \epsilon[$. En déduire qu'il y en a un aussi dans $]t - \epsilon; t + \epsilon[$.
10. On suppose qu'il existe une bijection $j : \mathbb{N} \longrightarrow [0;1[$. On choisit un $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 3$. Par 8, f_0 est une bijection. En notant sa bijection réciproque par g_0, $g_0 \circ j$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur S_0. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note par $a^{(p)}$ la suite $g_0 \circ j(p)$. On définit une nouvelle suite $c \in S$ par $c_p = 1$ si $a_p^{(p)} = 0$ et $c_p = 0$ si $a_p^{(p)} \neq 0$. Montrer que $c \in S_0$. Montrer que c n'appartient pas l'image de $g_0 \circ j$. En déduire une contradiction.

Commentaire :

Tout nombre réel x appartenant à $[0;1[$ s'écrit donc $f(a)$ pour une suite $a \in S$ (cf. 5). $f(a)$ est un développement en base b de x. Le réel x admet un unique développement $f(a)$ pour une suite $a \in S_0$ (cf. 8). Dans ce cas, $f(a)$ est son développement propre en base b. Lorsque x admet deux développements en base b, x est un rationnel du type cb^{-m} avec $c, m \in \mathbb{N}^*$, et il n'en admet pas d'autre (cf. 6 et 7). Le développement d'un tel x associé à une suite $a \in S \setminus S_0$ est dit impropre.

D'après 9, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Dans 10, on a utilisé le procédé diagonal de Cantor pour établir que l'intervalle $[0;1[$ n'est pas dénombrable.