Topologie de $\mathbb{R}$ (bis).

Exercice 46. : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 47. : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit a un point d'accumulation de X. Montrer que a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus X$ une valeur d'adhérence de X. Montrer que a est un point d'accumulation de X.
3. On suppose que les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux distincts. Montrer qu'une valeur d'adhérence a de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point d'accumulation de X.
4. Donner un exemple d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et qui a une valeur d'adhérence a qui n'est pas un point d'accumulation de X.

Exercice 48. : Soit F une partie de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de point d'accumulation. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \in F$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. En déduire que F est fermé.

Exercice 49. : Soit F une partie bornée de $\mathbb{R}$ sans point d'accumulation. Montrer que F est un ensemble fini.

Exercice 50. : Soit D une partie non vide et discrète de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'elle est seulement constituée de points isolés. Par l'exercice 49, on sait que, si D est bornée et sans points d'accumulation, alors c'est un ensemble fini.

1. Montrer qu'une partie finie F de $\mathbb{R}$ est discrète, bornée et sans point d'accumulation.
2. Montrer que $\mathring{D} = \emptyset$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de D. Montrer que $x \notin D$.
4. Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des parties discrètes de $\mathbb{R}$ sans point d'accumulation.
5. Vérifier que la partie $D_1 = \{n^{-1}; n \in \mathbb{N}^*\}$ est discrète, bornée, et admet 0 pour seul point d'accumulation.
6. Soit $(n; m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $m > n(n-1)$. Vérifier que, pour $n > 1$,
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n-1}.$$
7. Vérifier que la partie $D_2 = \{n^{-1} + m^{-1}; n, m \in \mathbb{N}^*, m > n(n-1)\}$ est discrète et bornée. Vérifier que l'ensemble des points d'accumulation de D_2 admet lui-même un point d'accumulation.

8. En est-il de même de $D_3 = \{n^{-1} + (-1)^m m^{-1}; n, m \in \mathbb{N}^*\,, m > 2n(n-1)\}$?

Exercice 51. : On pourra utiliser les exercices 21 et 50. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit D une partie discrète de $\mathbb{R}$. On montre qu'elle est au plus dénombrable.

1. Soit $d \in D$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ et $r_q > 0$ tel que $]q - r_q; q + r_q[\cap D = \{d\}$. On considère l'ensemble suivant
$$\mathbb{Q}_D \;=\; \left\{q \in \mathbb{Q}\,;\ \exists r > 0\,;\ ]q - r; q + r[\cap D \text{ a exactement un élément}\right\}.$$
2. Montrer que
$$D \;\subset\; \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_D}]q - r_q; q + r_q[\cap D\,.$$
3. En déduire que D est au plus dénombrable.

Exercice 52. : Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on note par A' l'ensemble des points d'accumulation de A. Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On note par $\mathcal{VA}_f(w)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de w qui appartiennent à $\mathbb{R}$. Montrer que A' est un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{VA}_f(w)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 53. : Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note par A' l'ensemble des points d'accumulation de A. Soit F une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une partie E de $\mathbb{R}$ telle que $E' = F$. (D'après l'exercice 52, l'hypothèse "F fermée" est nécessaire.)

1. Vérifier que $F' \subset F$. Montrer que $F \setminus F'$ n'a pas de point d'accumulation. En déduire que $F \setminus F'$ est fermé. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 48).
2. Donner un exemple de fermé non vide F tel que $F \setminus F'$ est vide.
3. Quel E peut-on choisir lorsque $F \setminus F'$ est vide ?
4. Donner un exemple de fermé non vide F tel que $F \setminus F'$ est non vide.
5. On suppose que $F \setminus F'$ est non vide. On choisit
$$E \;=\; F \cup G\,, \quad \text{où} \quad G \;=\; \left\{x + k^{-1};\ x \in F \setminus F' \text{ et } k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$
Dans la suite, on va montrer que $E' = F$.
a. Vérifier que $F \subset E'$.
b. Soit $y \in E'$.
    1. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers y et telle que, pour tout n, $y_n \neq y$.
    2. Montrer que si $\{n \in \mathbb{N}; y_n \in G\}$ est fini, $y \in F$.
    3. On suppose que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; y_n \in G\}$ est infini.
        i. Montrer qu'il existe une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers y et telle que, pour tout n, $y_{\varphi(n)} \in G$.
        ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\psi(n)$ le plus petit entier $k > 0$ tel que $y_{\varphi(n)} - 1/k \in F \setminus F'$. On suppose que la suite $(\psi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer qu'alors il existe une sous-suite $(y_{\varphi(\varphi_1(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est stationnaire. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 48). En déduire une contradiction.

iii. En utilisant le fait que $(\psi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, montrer que y est limite d'une suite d'éléments de $F \setminus F'$. En déduire que $y \in F \setminus F'$.

Exercice 54. : Pour une suite réelle w, on note par $\mathcal{VA}_f(w)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de w qui appartiennent à $\mathbb{R}$. Soit F une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une suite réelle $u = (u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $F = \mathcal{VA}_f(u)$. (D'après l'exercice 52, l'hypothèse "F fermée" est nécessaire.) On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On utilise les notions et les résultats de l'exercice 21.

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une famille finie $(x_j(\epsilon))_{j\in J_\epsilon}$ d'éléments deux à deux distincts de $F \cap [m - 1/2; m + 1/2]$ telle que

$$F \cap [m - 1/2; m + 1/2] \subset \bigcup_{j\in J_\epsilon}]x_j(\epsilon) - \epsilon; x_j(\epsilon) + \epsilon[\, .$$

La famille dépend bien sûr de m mais on n'indique pas cette dépendance.

2. Soit $m \in \mathbb{Z}$.

a). Construire, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, une famille finie

$$H_{m;1} = \Big\{ q\big(x_j(1)\big) \in \mathbb{Q};\ j \in J_1 \Big\}$$

de rationnels 2 à 2 distincts tels que, pour $j \in J_1$,

$$q\big(x_j(1)\big) \in]m - 1/2; m + 1/2[\quad \text{et} \quad \Big| q\big(x_j(1)\big) - x_j(1) \Big| \leq 1 \, .$$

b). Supposons construit, pour $n \geq 2$, $H_{m;1}, \cdots, H_{m;n-1}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N} \cap [1; n-1]$,

$$H_{m;p} = \Big\{ q\big(x_j(1/p)\big) \in \mathbb{Q};\ j \in J_{1/p} \Big\}$$

avec, pour tout $j \in J_{1/p}$,

$$q\big(x_j(1/p)\big) \in]m - 1/2; m + 1/2[\quad \text{et} \quad \Big| q\big(x_j(1/p)\big) - x_j(1/p) \Big| \leq 1/p \, ,$$

et telles que $q\big(x_j(1/p)\big) \neq q\big(x_{j'}(1/p')\big)$, pour tous $p, p' \in \mathbb{N} \cap [1; n-1]$, $j \in J_{1/p}$ et $j' \in J_{1/p'}$, avec $(p; j) \neq (p', j')$.
Construire une famille $H_{m;n}$ telle que la propriété précédente soit valable pour $H_{m;1}, \cdots, H_{m;n}$.

3. Par le théorème de récurrence, on a l'existence d'une suite $(H_{m;n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de familles finies vérifiant les propriétés du 2. On pose

$$H = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} H_{m;n} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{j\in J_{1/n}} \big\{ q\big(x_j(1/n)\big) \big\} \, .$$

a). Vérifier que H est dénombrable. On note par $b : \mathbb{N} \longrightarrow H$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur H. Soit $u = (u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = b(p) \in H$.

b). Soit $x \in F$. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in F \cap [m - 1/2; m + 1/2]$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_n \in J_{1/n}$ et telle que $x = \lim_{n\to\infty} q(x_{j_n}(1/n))$.
2. En déduire que x est un point d'accumulation de H. Par l'exercice 47, on a donc $x \in \mathcal{VA}_f(u)$.

c). Soit $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u qui converge. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et une injection croissante φ tels que, pour tout p, $w_{\varphi(p)} \in [m - 1/2; m + 1/2]$.

d). Soit $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u qui converge vers un certain v et qui vérifie, pour un certain $m \in \mathbb{Z}$, pour tout p, $v_p \in [m - 1/2; m + 1/2]$.

1. Par définition de la suite u, il existe, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $n_p \in \mathbb{N}^*$ et $j_p \in J_{1/n_p}$ tels que $v_p = q(x_{j_p}(n_p^{-1}))$. Montrer qu'il existe une injection croissante ψ telle que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$v_{\psi(\ell)} \;\in\; \left]x_{j_{\psi(\ell)}}(n_{\psi(\ell)}^{-1}) - (\ell+1)^{-1}; x_{j_{\psi(\ell)}}(n_{\psi(\ell)}^{-1}) + (\ell+1)^{-1}\right[\,.$$

(Indication : noter que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{p; n_p \leq \ell + 1\}$ est fini).

2. Montrer qu'il existe une injection croissante φ et $x \in F$ tels que

$$x \;=\; \lim_{p\to\infty} x_{j_{\psi\circ\varphi(\ell)}}\left(n_{\psi\circ\varphi(\ell)}^{-1}\right)\,.$$

3. En déduire que $v = x \in F$.

d). Montrer que $F = \mathcal{VA}_f(u)$.

Exercice 55. : Soit S l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$, $a_n = 1$ ou $a_n = 2$. Soit F le sous-ensemble de S formé des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ ou $a_n = 2$. Soit $f : S \longrightarrow [0; 1]$ définie par

$$f(a) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\,. \tag{12}$$

On note par E la fonction partie entière. On note par $\mathcal{C} = f(F)$, l'image de F par f. L'ensemble $\mathcal{C}$ est appelé ensemble triadique de Cantor.

1. Vérifier que f est bien définie, c'est-à-dire que la série dans (12) est convergente et que sa somme appartient à $[0; 1]$. Montrer que $0 \in \mathcal{C}$ et $1 \in \mathcal{C}$. Montrer que $1/3$ a deux antécédents par f. En particulier, f n'est pas injective.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $t \in S$. Montrer que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} \;\leq\; \frac{1}{3^p}\,. \tag{13}$$

Montrer que (13) est une égalité si et seulement si, pour $n \geq p + 1$, $t_n = 2$. On suppose maintenant qu'il existe $n \geq p + 1$ tel que $t_n \neq 2$. Soit k le plus petit entier n vérifiant cette propriété. Montrer que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} \;\leq\; \frac{1}{3^p} - \frac{1}{3^k}\,. \tag{14}$$

3. Soit $x \in [0;1[$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $a_1 = E(3x)$ et, pour $k > 1$,

$$a_k \;=\; E\left(3^k\left(x - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{3^n}\right)\right).$$

Montrer, par récurrence sur $k \geq 1$, la propriété

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\,, \quad \mathcal{P}(k) \;=\; \left(a_k \in \{0;1;2\} \quad \text{et} \quad 3^k\left(x - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n}\right) \in [0;1[\right).$$

En déduire que $a \in S$ et que $x = f(a)$. Montrer que f est surjective.

4. Soit $(s,t) \in S$ tel que $s \neq t$ et $f(s) = f(t)$. Soit k le premier entier $n \geq 1$ tel que $s_n \neq t_n$. On a donc $s_k \neq t_k$. Par exemple, $s_k < t_k$. Montrer que $s_k = t_k + 1$ et que, pour tout $n \geq k+1$, $s_n = 2$ et $t_n = 0$.
5. Soit $(s,t) \in S$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour $1 \leq n < k$, $s_n = t_n$, $s_k = t_k + 1$ et que, pour tout $n \geq k+1$, $s_n = 2$ et $t_n = 0$. Montrer que $s \neq t$ et $f(s) = f(t)$.
6. Montrer que la restriction $f_{|F}$ de f à F est injective. Montrer que F est un ensemble infini. En particulier, $f_{|F}$ est bijective de F sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est un ensemble infini.
7. Soit $x = f(b) \in \mathcal{C}$ avec $b \in F$, et $\delta > 0$. Montrer qu'il existe $c \in F$ telle que $y = f(c) \in]x-\delta; x+\delta[\setminus\{x\}$. (Indication : on pourra construire c en modifiant b à partir d'un rang p tel que $3^{-p+1} < \delta$). Montrer qu'il existe $d \in S \setminus F$ telle que $z = f(d) \in]x-\delta; x+\delta[$ et $z \notin \mathcal{C}$.
8. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère le sous-ensemble G_p de S formé des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $a_n \in \{0;2\}$, si $n < p$, $a_p = 1$, et $a_n = 0$, si $n > p$. Pour $a \in G_p$, on pose $I(a) =]f(a); f(a) + 3^{-p}[$. On remarque que $G_p \cap F = \emptyset$ et que $|G_p|$, le cardinal de G_p, est 2^{p-1}.
   a). Montrer que, si $p \neq p'$ dans $\mathbb{N}$, alors $G_p \cap G_{p'} = \emptyset$.
   b). Soit $a \in G_p$. Montrer que $f(a) + 3^{-p} \in \mathcal{C}$. Montrer que $f(a) \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $b \in F$ telle que $f(a) = f(b)$. En déduire que $I(a) \subset [0;1]$.
   c). Soit $b \in S$ tel que $f(b) \notin \mathcal{C}$. Nécessairement, $b \notin F$. Soit p le plus petit entier $n > 0$ tel que $b_n \notin \{0;2\}$. Soit $a \in S$ définie par $a_n = b_n$, si $n \leq p$, et $a_n = 0$, sinon. Vérifier que $a \in G_p$. Montrer que $f(b) \in I(a)$.
   d). Soit $a \in G_p$ et $b \in S$ tel que $f(b) \in I(a)$. Montrer par récurrence sur n que, pour $1 \leq n < p$, $a_n = b_n$. Montrer que $b_p = 1 = a_p$. En déduire que $f(b) \notin \mathcal{C}$.
   e). Soit $a \in G_p$ et $a' \in G_{p'}$ telles que $a \neq a'$. Montrer que $I(a) \cap I(a') = \emptyset$.
   f). Pour $P \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\mathcal{O}_P \;=\; \bigcup_{p=1}^{P} \bigcup_{a\in G_p} I(a) \quad \text{et} \quad \mathcal{O} \;=\; \bigcup_{P\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_P \;\subset [0;1]\,.$$

   Montrer que $\mathcal{O}_P$ est la réunion de $2^P - 1$ intervalles ouverts deux à deux disjoints. Calculer L_P, la longueur totale de $\mathcal{O}_P$. Montrer que la suite $(L_P)_{P\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. $\mathcal{O}$ contient donc des ensembles dont la longueur totale s'approche de 1 aussi près que l'on veut.

g). Montrer que $(\mathcal{O}, \mathcal{C})$ forme une partition de $[0;1]$, c'est-à-dire que $\mathcal{O} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et $\mathcal{O} \cup \mathcal{C} = [0;1]$, ou, de manière équivalente, que $\mathcal{O} = [0;1] \setminus \mathcal{C}$, le complémentaire de $\mathcal{C}$ dans $[0;1]$.

9. Montrer que $\mathcal{C}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{C}$ est compact.
10. Montrer que $\mathcal{C}$ est constitué de points d'accumulation de $\mathcal{C}$. Montrer que l'intérieur de $\mathcal{C}$ est vide.

Exercice 56. : Dans cet exercice, on montre que l'ensemble triadique de Cantor $\mathcal{C}$ de l'exercice 55 est le même que l'ensemble C de l'exercice 4 du contrôle continu du 6 mars 2015. Après avoir rappelé quelques notations de cet exercice 4, on établit quelques résultats préliminaires avant de prouver l'égalité des deux ensembles.
Soit $f_0, f_1 : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ définies par $f_0(x) = x/3$ et $f_1(x) = 2/3 + x/3$. On remarque que f_0 et f_1 sont continues et strictement croissantes donc injectives. On définit par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, une famille $\{I_{p;k}; p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]\}$ de sous-intervalles de $[0;1]$ de la façon suivante : $I_{0;0} = [0;1]$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$,

$$I_{p+1;2k} \;=\; f_0\big(I_{p;k}\big) \quad \text{et} \quad I_{p+1;2k+1} \;=\; f_1\big(I_{p;k}\big)\,.$$

Pour deux parties A et B de $[0;1]$, on dit que A *est à gauche de* B, on note $A \ll B$ si $\sup A \leq \inf B$ et $A \cap B = \emptyset$. On dit que A *est collée à gauche de* B, on note $A <_c B$ si $\sup A = \inf B$ et $A \cap B = \emptyset$.
L'ensemble S étant celui de l'exercice 55, on définit deux applications $\varphi_0, \varphi_1 : S \longrightarrow S$ par, pour $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in S$, $\varphi_0(a) = {}_0a$ et $\varphi_1(a) = {}_1a$ où ${}_0a_1 = 0$, ${}_1a_1 = 2$, et, pour $n \geq 2$, ${}_0a_n = {}_1a_n = a_{n-1}$.

1. Soit A et B deux parties de $[0;1]$. Montrer que, si $A \ll B$, alors
$$\big(f_0(A) \ll f_0(B)\big) \text{ et } \big(f_1(A) \ll f_1(B)\big) \text{ et } \big(f_0(A) \ll f_1(B)\big) \text{ et } \big(f_0(B) \ll f_1(A)\big)\,.$$
Montrer que, si $A <_c B$, alors $f_0(A) <_c f_0(B)$ et $f_1(A) <_c f_1(B)$.
2. Pour $a \in S$, montrer que $f_0(f(a)) = f(\varphi_0(a))$ et $f_1(f(a)) = f(\varphi_1(a))$. (L'application f est celle de l'exercice 55.)
3. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Vérifier que l'ensemble G_p (défini dans l'exercice 55) est l'union disjointe de ${}_0G_p = \{a \in G_p; a_0 = 0\}$ et ${}_1G_p = \{a \in G_p; a_0 = 2\}$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\varphi_0(G_p) = {}_0G_{p+1}$ et $\varphi_1(G_p) = {}_1G_{p+1}$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et une suite $a \in G_p$. Montrer que $f_0(f(a) + 3^{-p}) = f(\varphi_0(a)) + 3^{-(p+1)}$ et $f_1(f(a) + 3^{-p}) = f(\varphi_1(a)) + 3^{-(p+1)}$. En déduire que $f_0(I(a)) = I(\varphi_0(a))$ et $f_1(I(a)) = I(\varphi_1(a))$. (Les intervalles $I(a)$ sont définis dans l'exercice 55.)
6. On montre, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(p)$ suivante :
$i)_p$. Pour $k, k' \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tels que $I_{p;k} \ll I_{p;k'}$ et tels que, pour tout $\ell \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, la proposition
$$\big(I_{p;k} \ll I_{p;\ell} \quad \text{et} \quad I_{p;\ell} \ll I_{p;k'}\big) \tag{15}$$
soit fausse, il existe $r \in \mathbb{N} \cap [1;p]$ et $a \in G_r$ tels que $I_{p;k} <_c I(a) <_c I_{p;k'}$.

$ii)_p$. Pour tout $r, r' \in \mathbb{N} \cap [1;p]$ et tous $a \in G_r$ et $a' \in G_{r'}$ tels que $I(a) \ll I(a')$ et tels que, pour tout $s \in \mathbb{N} \cap [1;p]$ et $b \in G_s$, la proposition

$$\big(I(a) \ll I(b) \quad \text{et} \quad I(b) \ll I(a')\big) \tag{16}$$

soit fausse, il existe $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tel que $I(a) <_c I_{p;k} <_c I(a')$.

$iii)_p$. Il existe $k, k' \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tels que $0 \in I_{p;k}$ et $1 \in I_{p;k'}$.

a). Vérifier que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

b). On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie, pour un $p \geq 2$. Soit $I_{p+1;k}$ et $I_{p+1;k'}$ satisfaisant la proposition (15). Montrer que $I_{p+1;k} <_c I(a) <_c I_{p+1;k'}$ avec $a \in G_1$, ou bien les deux intervalles sont inclus dans $I_{1;0} = [0; 1/3]$, ou bien les deux intervalles sont inclus dans $I_{1;1} = [0; 1/3]$.

c). Dans le cadre du 6.b), on suppose que $I_{p+1;k} \subset f_\sigma([0;1])$ et $I_{p+1;k'} \subset f_\sigma([0;1])$, pour $\sigma \in \{0;1\}$. Montrer qu'il existe k_1 et k_1' dans $\mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tels que $I_{p+1;k} = f_\sigma(I_{p;k_1})$ et $I_{p+1;k'} = f_\sigma(I_{p;k_1'})$ et tels que $I_{p;k_1}$ et $I_{p;k_1'}$ vérifient la proposition (15). En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N} \cap [1; p+1]$ et $a \in G_r$ tels que $I_{p+1;k} <_c I(a) <_c I_{p+1;k'}$.

d). On suppose toujours $\mathcal{P}(p)$ vraie, pour un $p \geq 2$. Soit $r \in \mathbb{N} \cap [1; p+1]$ et $a \in G_r$ tels que $I(a)$ et $]1/3; 2/3[$ vérifient la proposition (16) ou bien tels que $]1/3; 2/3[$ et $I(a)$ vérifient la proposition (16). Montrer que $r = p+1$. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tel que $I(a) <_c I_{p+1;k} <_c]1/3; 2/3[$ ou $]1/3; 2/3[<_c I_{p+1;k} <_c I(a)$.

e). On suppose toujours $\mathcal{P}(p)$ vraie, pour un $p \geq 2$. Soit $r, r' \in \mathbb{N} \cap]1; p]$, $a \in G_r$ et $a' \in G_{r'}$ tels que $I(a)$ et $I(a')$ vérifient la proposition (16). Montrer que $r = p+1$ ou $r' = p + 1$. Montrer qu'il existe $\sigma \in \{0; 1\}$, $a_1 \in G_{r-1}$ et $a_1' \in G_{r'-1}$ tels que $f_\sigma(I(a_1)) = I(a)$ et $f_\sigma(I(a_1')) = I(a')$. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^{p+1} - 1]$ tel que $I(a) <_c I_{p+1;k} <_c I(a')$.

f). On a donc montré par récurrence que $\mathcal{P}(p)$ vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N} \cap [1; p]$, $a \in G_r$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. Montrer que $I(a) \cap I_{p;k} = \emptyset$.

g). Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0; 1]$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, $x \notin I_{p;k}$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N} \cap [1; p]$ et $a \in G_r$ tels que $x \in I(a)$.

h). Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(\mathcal{O}_p, C_p)$ forme une partition de $[0; 1]$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_p \cap C_p = \emptyset$ et $\mathcal{O}_p \cup C_p = [0; 1]$, ou, de manière équivalente, que $\mathcal{O}_p = [0; 1] \setminus C_p$, le complémentaire de C_p dans $[0; 1]$.

i). En déduire que $C = \mathcal{C}$.

Exercice 57. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrer qu'elle est bornée. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Montrer qu'elle est de Cauchy.

Exercice 58. : Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| < 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} a^k \, .$$

Montrer de deux façons différentes qu'elle est de Cauchy.

Exercice 59. : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. On note par E la fonction partie entière. L'objet de cet exercice est de montrer que le segment $[a; b]$ possède la propriété de Borel-Lebesgue définie dans l'exercice 44 et que l'on rappelle ici : Pour toute collection $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'ouverts U_α de $\mathbb{R}$ telle que

$$[a;b] \ \subset \ \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \,, \tag{17}$$

on peut trouver un sous-ensemble fini F de A tel que

$$[a;b] \ \subset \ \bigcup_{\alpha\in F} U_\alpha \,. \tag{18}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on pose $I(x;\delta) =]x-\delta; x+\delta[$.

1. Soit $\delta > 0$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble fini G_δ de $[a;b]$, dont on précisera le nombre d'éléments, tel que

$$[a;b] \ \subset \ \bigcup_{x\in G_\delta} I(x;\delta) \,.$$

   (Indication : on pourra prendre $N = E(2(b-a)/(3\delta))$ et $G_\delta = \{a+(1+3k)\delta/2; 0 \leq k \leq N\}$).
   Cette propriété étant vraie pour tout $\delta > 0$, on dit que $[a;b]$ est précompact.
2. On montre la propriété souhaitée par l'absurde. On suppose que l'on ait une collection $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ vérifiant (17) mais telle que (18) soit fausse pour tout sous-ensemble fini F de A. Construire par récurrence une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a;b]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I(x_n; 2^{-n}) \cap I(x_{n+1}; 2^{-n-1}) \neq \emptyset$ et telle que (18) avec $[a;b]$ remplacé par $I(x_n; 2^{-n})$ soit fausse pour tout sous-ensemble fini F de A.
   (Indication : on pourra utiliser 1.).
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle est donc convergente. On appelle c sa limite. Vérifier que $c \in [a;b]$. Par (17), il existe donc $\alpha_c \in A$ tel que $c \in U_{\alpha_c}$.
4. Montrer qu'il existe $r_c > 0$ tel que $I(c; r_c) \subset U_{\alpha_c}$.
5. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I(x_n; 2^{-n}) \subset I(c; r_c)$.
6. En déduire une contradiction.

Exercice 60. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{P} \ = \ \big(\forall \epsilon > 0 \,,\, \exists \delta > 0 \,;\ \forall x \in \mathbb{R} \,,\, |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\big) \,,$$

$$\mathcal{P}' \ = \ \Big(\forall \epsilon > 0 \,,\, \exists \delta > 0 \,;\ f\big(]a-\delta; a+\delta[\big) \ \subset]f(a)-\epsilon; f(a)+\epsilon[\Big) \,,$$

$$\mathcal{Q} \ = \ \big(\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \,,\, \exists U \in \mathcal{V}_a \,;\ f(U) \subset V\big) \,,$$

$$\mathcal{Q}' \ = \ \big(\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \,,\, \exists U \in \mathcal{V}_a \,;\ U \subset f^{-1}(V)\big) \,,$$

$$\mathcal{R} \ = \ \big(\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \,,\, f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a\big) \,.$$

2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\overline{\mathcal{P}} \;=\; \big(\forall a\in\mathbb{R}\,,\,\mathcal{P}\big)\,,$$

$$\overline{\mathcal{R}} \;=\; \big(\forall V\in\mathcal{O}\,,\,f^{-1}(V)\in\mathcal{O}\big)\,.$$

3. Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{P} \;=\; \big(\forall A>0\,,\,\exists\delta>0\,;\;\forall x\in\mathbb{R}\,,\,|x-a|<\delta\Longrightarrow f(x)>A\big)\,,$$

$$\mathcal{R} \;=\; \big(\forall V\in\mathcal{V}_{+\infty}\,,\,f^{-1}(V)\in\mathcal{V}_a\big)\,.$$

4. Soit $\ell\in\mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{P} \;=\; \big(\forall\epsilon>0\,,\,\exists A>0\,;\;\forall x\in\mathbb{R}\,,\,x>A\Longrightarrow |f(x)-\ell|<\epsilon\big)\,,$$

$$\mathcal{R} \;=\; \big(\forall V\in\mathcal{V}_{\ell}\,,\,f^{-1}(V)\in\mathcal{V}_{+\infty}\big)\,.$$

Exercice 61. : Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Soit $\ell\in\mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{P} \;=\; \big(\forall\epsilon>0\,,\,\exists N\in\mathbb{N}\,;\;\forall n\in\mathbb{N}\,,\,n\geq N\Longrightarrow |u_n-\ell|<\epsilon\big)\,,$$

$$\mathcal{P}' \;=\; \Big(\forall\epsilon>0\,,\;\exists N\in\mathbb{N}\,;\;\forall n\in\mathbb{N}\,,\,n\geq N\Longrightarrow u_n\;\in]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[\Big)\,,$$

$$\mathcal{Q} \;=\; \big(\forall V\in\mathcal{V}_{\ell}\,,\,\exists N\in\mathbb{N}\,;\;u\big([N;+\infty[\cap\mathbb{N}\big)\;\subset\;V\big)\,,$$

$$\mathcal{Q}' \;=\; \big(\forall V\in\mathcal{V}_{\ell}\,,\,\exists U\in\mathcal{V}^{\mathbb{N}}_{+\infty}\,;\;U\subset u^{-1}(V)\big)\,,$$

$$\mathcal{R} \;=\; \big(\forall V\in\mathcal{V}_{\ell}\,,\,u^{-1}(V)\in\mathcal{V}^{\mathbb{N}}_{+\infty}\big)\,.$$

2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{P} \;=\; \big(\forall A>0\,,\,\exists N\in\mathbb{N}\,;\;\forall n\in\mathbb{N}\,,\,n\geq N\Longrightarrow u_n<-A\big)\,,$$

$$\mathcal{R} \;=\; \big(\forall V\in\mathcal{V}_{-\infty}\,,\,u^{-1}(V)\in\mathcal{V}^{\mathbb{N}}_{+\infty}\big)\,.$$

Exercice 62. : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que, pour tout $c\in\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(c)$ est fermé.
2. Soit $c\in\mathbb{R}$. Montrer que $f^{-1}(c)$ est d'intérieur non vide si et seulement si il existe un intervalle I de longueur strictement positive tel que la restriction de f à I soit constante égale à c.
3. On suppose que f est de classe C^1. Soit $a\in\mathbb{R}$ et $c=f(a)$. Montrer que, si $f'(a)\neq 0$, alors a est un point isolé de $f^{-1}(c)$.
4. Toujours pour f de classe C^1, on suppose que a est un maximum local strict de f, c'est-à-dire qu'il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $x\in]a-\delta;a+\delta[\setminus\{a\}$, $f(x)<f(a)=:c$. Montrer que a est un point isolé de $f^{-1}(c)$. Que peut-on dire de $f'(a)$? Donner un exemple d'une telle fonction f.

Exercice 63. : Pour $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $A_h = h^{-1}(]0; +\infty[)$ et $B_h = h^{-1}([0; +\infty[)$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^8 - 5x^4 + 8x - 4$. A_f est-il ouvert ? fermé ? compact ? Même question pour B_f. (Indication : on pourra remarquer que $f(1) = 0$).
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. A_g est-il ouvert ? fermé ? compact ? Même question pour B_g. (Indication : on pourra remarquer que $g(1) = 0$). Vérifier que $\overline{A_g} \subset B_g$ mais que $\overline{A_g} \neq B_g$.
3. Que peut-on dire de l'énoncé suivant ? Pour toute fonction continue $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout ouvert U de $\mathbb{R}$,
$$h^{-1}\big(\overline{U}\big) \;=\; \overline{h^{-1}(U)}\,.$$

Exercice 64. : Vrai ou faux. Justifier toute réponse. Dans tout l'exercice, A désigne une partie de $\mathbb{R}$.

1. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
2. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
3. Soit U un ouvert et $x \in \overline{U}$. Alors $x \notin U$.
4. Soit U un ouvert et $x \in \partial U$. Alors $x \notin U$.
5. Si $\mathring{A} = \emptyset$ alors A est une partie finie.
6. Soit U un ouvert et F un fermé. $U \cap F$ est ouvert.
7. Soit U un ouvert et F un fermé. $U \cap F$ est fermé.
8. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. De toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a < u_n \leq b$, on peut extraire une sous-suite convergente.
9. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. De toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a < u_n \leq b$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $]a; b]$.
10. Une intersection quelconque de parties compactes de $\mathbb{R}$ est compacte.
11. Il existe une partie non vide et compacte de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide.
12. Une partie discrète admet au plus un nombre fini de points d'accumulation.
13. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. La "courbe" de niveau $f^{-1}(\{c\})$ est un fermé de $\mathbb{R}$.