Université de Cergy-Pontoise **2019-2020**
Calcul intégral, S5.

Applications mesurables.

Exercice 57. : Soit X (resp. Y) un ensemble et $\mathcal{T}_X$ (resp. $\mathcal{T}_Y$) une tribu sur X (resp. Y). Soit $f : X \longrightarrow Y$. On utilise les notions et les notations des exercices 39 et 47. On note par $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ l'ensemble des fonctions $g : X \longrightarrow Y$ qui sont mesurables relativement aux tribus $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$. Lorsque $X = Y$ et $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y$, note $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ par $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subset \mathcal{T}_X$.
2. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ si et seulement si $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}(f; \mathcal{T}_X)$.
3. On considère la tribu $\{B \cap f(X); B \in \mathcal{T}_Y\}$ sur la partie $f(X)$ de Y, c'est la trace de la tribu $\mathcal{T}_Y$ sur $f(X)$ notée $\mathcal{T}_Y|f(X)$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ si et seulement si l'application $g : X \longrightarrow f(X)$, donnée par $g(x) = f(x)$, appartient à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y|f(X))$.
4. Soit E une partie de X et $\mathcal{T}_X|E$ la tribu sur E définie par $\mathcal{T}_X|E = \{A \cap E; A \in \mathcal{T}_X\}$. $\mathcal{T}_X|E$ est appelée la trace sur E de la tribu $\mathcal{T}_X$. Montrer que, si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$, alors la restriction $f_{|E}$ de f à E appartient à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X|E; \mathcal{T}_Y)$.
5. On suppose que la tribu $\mathcal{T}_Y$ est engendrée par une famille $\mathcal{E}$ de parties de Y, i.e. $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{E}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.
6. Soit Z un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{T}_Z$ et $g : Y \longrightarrow Z$. Montrer que, si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ et si $g \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_Y; \mathcal{T}_Z)$, alors $g \circ f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Z)$.
7. On suppose que f est constante. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$.
8. Montrer que la fonction identique id_X sur X appartient à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X)$. Montrer qu'elle appartient aussi à $\mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T})$, si $\mathcal{T}$ est une tribu sur X vérifiant $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X$.
9. On suppose que f prend un nombre fini de valeurs : $c_1, \cdots, c_n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $V = \{c_j; j \in [1; n] \cap \mathbb{N}\} \subset Y$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{T}_Y|V) \subset \mathcal{T}_X$.
10. On suppose que f prend un nombre fini de valeurs : $c_1, \cdots, c_n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, et que, pour tout $j \in [1; n] \cap \mathbb{N}$, $f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{T}_X$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$.
11. Soit A une partie non vide et non pleine de X et $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(\{A\})$. Soit B une partie non vide et non pleine de X et $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(\{B\})$. On suppose que f prend quatre valeurs c_1, c_2, c_3 et c_4 telles que $\{c_1; c_2\} \subset B$ et $\{c_3; c_4\} \subset Y \setminus B$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$ mais que, pour tout $j \in [1; 4] \cap \mathbb{N}$, $f^{-1}(\{c_j\}) \notin \mathcal{T}_X$.

Remarque : Soit $f : X \longrightarrow Y$ et μ_X une mesure positive définie sur $\mathcal{T}_X$. D'après le 2 de l'exercice 47, elle définit une mesure τ sur la tribu $\mathcal{T}(f; \mathcal{T}_X)$ sur Y par la formule $\tau(B) = \mu_X(f^{-1}(B))$. Si, de plus, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_X; \mathcal{T}_Y)$, alors, par le 2 du présent exercice, on peut restreindre τ à la tribu $\mathcal{T}_Y$. La restriction de τ à $\mathcal{T}_Y$ est appelée la *mesure image* de μ_X par l'application f. Cette notion est centrale dans la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue.

Exercice 58. : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$. On rappelle que f est dite étagée sur $(\Omega, \mathcal{T})$ si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et si elle prend un nombre fini de valeurs.

1. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$.
   a). Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ appartient à $\mathcal{T}$.
   b). Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout fermé de $\mathbb{R}^d$ appartient à $\mathcal{T}$.
   c). Montrer que $f = (f_1; \cdot; f_d) \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si, pour tout $j \in [1; d] \cap \mathbb{N}$, $f_j \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
   d). Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \Omega; f(x) > a\} \in \mathcal{T}$.
2. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que $\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si et seulement si $A \in \mathcal{T}$.
3. Soit $(m; n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Montrer que $g \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m); \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
4. Soit $S : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ l'application définie par $S(x; y) = x + y$. Montrer que $S \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d}); \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
5. Soit $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ l'application définie par $P(x; y) = x \cdot y$. Montrer que $P \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1}); \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
6. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\lambda \in \mathbb{R}$, deux applications $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $g \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et $h \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, et une application $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $a \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
   a). Montrer que $g + h \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
   b). Montrer que $ah \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
   c). Montrer que $\lambda h \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
7. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $(c_1; \cdots; c_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$, $(A_1; \cdots; A_n) \in \mathcal{T}^n$. Vérifier que l'application
$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{A_j}$$
   est étagée. Vérifier que, dans le cas $n = 2$, cette fonction prend au plus 4 valeurs. Et dans le cas $n = 3$?
8. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$. On suppose que f prend un nombre fini de valeurs : $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}^d$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_i \neq c_j$, si $i \neq j$). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
$$\mathcal{P}_1 = \big(f \text{ est étagée}\big)\,;\ \mathcal{P}_2 = \big(\forall j \in [1; n] \cap \mathbb{N}\,,\ f^{-1}(\{c_j\}) \in \mathcal{T}\big)\,;$$
$$\mathcal{P}_3 = \left(\forall j \in [1; n] \cap \mathbb{N}\,,\ \exists A_j \in \mathcal{T}\,;\ \Omega = \bigsqcup_{1 \le j \le n} A_j\,,\ f = \sum_{1 \le j \le n} c_j \mathbb{1}_{A_j}\right);$$
$$\mathcal{P}_4 = \left(\forall j \in [1; n] \cap \mathbb{N}\,,\ \exists A_j \in \mathcal{T}\,;\ f = \sum_{1 \le j \le n} c_j \mathbb{1}_{A_j}\right).$$

Exercice 59. : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$.
Une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b$ et $(c_1; \cdots; c_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour tout $j \in [1; n] \cap \mathbb{N}$, f soit constante égale à c_j sur $]\sigma_{j-1}; \sigma_j[$.
Une fonction $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction étagée si g prend un nombre fini de valeurs et si $g \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R})|[a; b]; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})|[a; b]$ est la trace de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $[a; b]$ (cf. exercice 57).

1. Montrer que toute fonction en escalier sur $[a; b]$ est étagée sur $[a; b]$.
2. Montrer que la restriction de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ à $[a; b]$ est étagée mais n'est pas une fonction en escalier sur $[a; b]$.

Exercice 60. : Montrer que l'ensemble des fonctions étagées de $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 61. : Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et μ une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $(f \star \mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$. On va voir que $f \star \mu$ est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (c'est en fait la mesure image de μ par f, dans le sens donné dans l'exercice 57). On dit que la mesure μ est invariante par f si $f \star \mu = \mu$. On note par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $f \star \mu$ est bien définie et est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$. Déterminer $g \star \delta_4$. Déterminer $g \star (\delta_{-2} + 3\delta_3)$.
3. Trouver une fonction $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que λ soit invariante par k.
4. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2x$. Déterminer $h \star \lambda$.
5. Déterminer toutes les mesures finies invariantes par h. (Indication : pour une mesure positive μ, on pourra étudier la fonction $a \mapsto \mu([0; a])$.)

Exercice 62. : On note par $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ (resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) la tribu borélienne sur $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{R}$). On pose $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|\overline{\mathbb{R}^+}$. Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.

1. Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \Omega; f(x) > a\} \in \mathcal{T}$.
2. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que f ne s'annule pas. Montrer que $1/f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
3. Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$. En posant $1/(+\infty) = 0$ et $1/0 = +\infty$, $1/f$ est bien définie. Montrer que, si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+}))$ alors $1/f \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+}))$.