Séries réelles et complexes.

Exercice 40. : Étudier la convergence des séries de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définis par

$$u_n = \frac{e^{2in}}{n^3}, \quad v_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n\sqrt{n}}, \quad w_n = \frac{(-1)^n}{\big(\ln(n+2)\big)^{1/2}},$$

$$y_n = (-1)^n \ln\Big(3 + \sin\big(n^3 - 4n^2 + n - 1\big)\Big), \quad z_n = \frac{(-1)^n}{3^n - 2^n}.$$

Exercice 41. : En utilisant une formule de Taylor-Lagrange pour la fonction ln, étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

On comparera le résultat trouvé avec l'exercice 33.

Exercice 42. : Séries de Bertrand.
Soit α et β deux réels. On étudie la convergence des séries de termes généraux donnés respectivement par, pour $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \big(\ln n\big)^\beta} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha \big(\ln n\big)^\beta}.$$

Pour $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, on dit que $(a;b) \prec (a';b')$ si $a < a'$ ou bien si $a = a'$ et $b < b'$. Il s'agit de l'ordre lexicographique sur les mots de deux lettres.
Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $(1;1) \prec (\alpha;\beta)$. Montrer que $\sum v_n$ converge si et seulement si $(0;0) \prec (\alpha;\beta)$.

Exercice 43. : Soit $a \in \mathbb{N}$ et $D = [\![a; \to [\![$. Pour $p \geq 1$, soit ℓ^p l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in D}$ telles que la série $\sum_{n\in D} |u_n|^p$ converge. Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes bornées et soit c_0 l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in D}$ telles que $|u|$ tend vers 0.
Dans tout l'exercice, on utilise la convention selon laquelle, pour $p \geq 1$, $t^p = \exp(p \ln t)$, si $t > 0$, et $0^p = 0$.

1. Soit $p \geq 1$. Montrer que $\ell^p \subset c_0$. Trouver une suite u appartenant à c_0 qui n'est pas dans ℓ^p.
2. Montrer que $c_0 \subset \ell^\infty$. Trouver une suite v appartenant à ℓ^∞ qui n'est pas dans c_0.
3. Soit $p \geq q \geq 1$. Montrer que $\ell^q \subset \ell^p$. Lorsque $p > q$, trouver une suite w appartenant à ℓ^p qui n'est pas dans ℓ^q.

Il se trouve que ℓ^p, pour $p \geq 1$, ℓ^∞ et c_0 sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels normés de dimension infinie.

Exercice 44. : Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle ou complexe. On note par $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa moyenne de Césaro définie par (2).

1. Montrer que l'implication
$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \ \text{ converge}\right) \implies \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \ \text{ converge}\right)$$
est fausse. Indication : on pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_n = 0$ si $n > 1$.
2. Dans cette question seulement, on suppose que u est positive. Montrer l'implication
$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \ \text{ diverge}\right) \implies \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \ \text{ diverge}\right).$$
3. Contruire une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} u_k \ = \ (-1)^n \, .$$
Que peut-on dire de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$? En déduire que l'implication du 2. est fausse en général.
4. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et on note S sa somme. On suppose, de plus, qu'il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k \ - \ S\right| \ \leq \ \frac{C}{n^\epsilon} \, .$$
Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} v_k \ = \ S \ln n \ + \ o(\ln n) \, .$$

Exercice 45. : Soit $(\alpha; \beta) \in]-\pi; \pi]^2$. Soit $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive, décroissante et tendant vers 0. On considère un mobile dans le plan complexe dont la trajectoire est définie par récurrence comme suit.
Au départ, le mobile se trouve en $z_0 = 0$. À l'étape 1, le mobile s'est déplacé d'une longueur ℓ_1 sur la demi-droite issue de z_0 d'angle polaire α pour arriver au point z_1. À l'étape 2, le mobile s'est déplacé d'une longueur ℓ_2 sur la demi-droite issue de z_1 d'angle polaire β pour arriver au point z_2. Le mobile étant arrivé après l'étape n en un point z_n, il se déplace dans l'étape suivante sur la demi-droite issue de z_n d'angle polaire α (resp. β) si n est pair (resp. si n est impair) pour arriver en z_{n+1}.

1. On considère la cas où $\ell_n = 2^{-n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a). Représenter le début de la trajectoire dans le cas où $\alpha = -\pi/4$ et $\beta = \pi/8$.
b). Pour $p \in \mathbb{N}$, donner une expression de z_{2p} et de z_{2p+1} en fonction de p.
c). Montrer que les suites $(z_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(z_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite $L \in \mathbb{C}$, que l'on déterminera. D'après l'exercice 29, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

2. On s'intéresse au cas où $\ell_n = n^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
a). Pour $p \in \mathbb{N}$, donner une expression de z_{2p} et de z_{2p+1} en fonction de p.
b). Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n \;=\; \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} \quad \text{et} \quad b_n \;=\; \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\,.$$

Montrer que $2a_n = 2\ln(2) + \ln(n) + \gamma + o(1)$ et $2b_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler définie dans l'exercice 33.
c). On suppose que $\max(\alpha;\beta) = \min(\alpha;\beta) + \pi$. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e^{i\alpha}\ln(2)$.
d). On suppose que $\max(\alpha;\beta) \neq \min(\alpha;\beta) + \pi$. Montrer que $\lim |z_n| = +\infty$ et que $\lim |z_n|^{-1} z_n = e^{i(\alpha+\beta)/2}$.