Université de Cergy-Pontoise **2015-2016**
Approfondissements, S4.

Uniforme continuité, critère de Cauchy, convergence uniforme.

Exercice 65. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 66. : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est continue.

Exercice 67. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \ < \ +\infty \, .$$

Montrer que f est uniformément continue. Application : montrer que sinus et cosinus sont uniformément continues.

Exercice 68. : Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne si

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \, , \quad |f(x) - f(y)| \ \leq \ k \cdot |x - y| \, .$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit k-lipschitzienne.

1. Trouver toutes les fonctions 0-lipschitziennes.
2. Montrer que la fonction f de l'exercice 65 est $|a|$-lipschitzienne.
3. Montrer que la fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne.
4. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue (donc continue).
5. Pour $k > 0$, donner une fonction k-lipschitzienne qui n'est pas dérivable partout.
6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne avec $k \in \mathbb{R}^+$. Soit D l'ensemble des points où f admet une dérivée. Montrer que

$$\sup_{x\in D} |f'(x)| \ \leq \ k \, .$$

   Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(0) - kx \leq f(x) \leq f(0) + kx$ et, pour tout $x \leq 0$, $f(0) + kx \leq f(x) \leq f(0) - kx$.

Exercice 69. : On utilise les exercices 9 et 68. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour $a \in \mathbb{R}$, soit φ_a la fonction donnée par (4) avec $I = \mathbb{R}$ (cf. exercice 10). Par convexité, φ_a est croissante donc ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ existent (cf. exercice 9).

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{-\infty} \varphi_a = \lim_{-\infty} \varphi_0$ et $\lim_{+\infty} \varphi_a = \lim_{+\infty} \varphi_0$.
2. On suppose que f est k-lipschitzienne, pour un $k \geq 0$. Montrer que les limites $\lim_{-\infty} \varphi_0$ et $\lim_{+\infty} \varphi_0$ sont finies et vérifient $-k \leq \lim_{-\infty} \varphi_0 \leq \lim_{+\infty} \varphi_0 \leq k$.

3. On suppose que les $\lim\limits_{-\infty} \varphi_0$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi_0$ sont finies. Soit $k = \max(|\lim\limits_{-\infty} \varphi_0|; |\lim\limits_{+\infty} \varphi_0|)$. Pour $a < b$, montrer que

$$\lim_{-\infty} \varphi_0 \ \leq \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ \leq \ \lim_{+\infty} \varphi_0 \, . \tag{19}$$

(Indication : on pourra utiliser 1). En déduire que f est k-lipschitzienne.

4. Pour $k > 0$, donner une fonction k-lipschitzienne et convexe qui n'est pas dérivable partout.

Exercice 70. : Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On montre qu'elle est uniformément continue.

1. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que, pour tout $x \in [a; b]$, il existe un $\delta_x > 0$ tel que

$$f\big([a; b] \cap]x - 3\delta_x; x + 3\delta_x[\big) \ \subset \ ]f(x) - \epsilon/3; f(x) + \epsilon/3[\, .$$

2. Montrer qu'il existe une famille finie $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de $[a; b]$ tel que

$$[a; b] \ \subset \ \bigcup_{i \in J}]x_j - \delta_{x_j}; x_j + \delta_{x_j}[\, .$$

3. Soit $\delta = \min\{\delta_{x_j}; j \in J\} > 0$. Montrer que, pour $(x; y) \in [a; b]^2$ tel que $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Exercice 71. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que ses limites $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ existent et vérifient $f(0) > \lim\limits_{+\infty} f$ et $f(0) > \lim\limits_{-\infty} f$. Montrer que f a un maximum.

Exercice 72. : Soit $f, g :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) \ = \ \sum_{k=1}^{E(1/x)} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{et} \quad g(x) \ = \ \sum_{k=1}^{E(1/x)} \frac{(-1)^k}{k + x} \, .$$

Montrer que $\lim\limits_{0} f$ et $\lim\limits_{0} g$ existent et sont finies. (Indication : on pourra utiliser la règle spéciale des séries alternées et le critère de Cauchy).

Exercice 73. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx \ < \ +\infty \, .$$

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit

$$g(t) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \big| f(x) \ - \ f(x - t) \big| \, dx \, .$$

Vérifier que g est bien définie.

2. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit
$$h(t) \ = \ \int_a^b \big|f(x) \ - \ f(x-t)\big|\, dx \,.$$
Montrer que $\lim_0 h \ = \ 0$. (Indication : on pourra utiliser que f est uniformément continue sur $[a-1;b+1]$).
3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que
$$\int_{-\infty}^{-A} |f(x)|\, dx \ + \ \int_A^{+\infty} |f(x)|\, dx \ < \ \frac{\epsilon}{4} \,.$$
4. Montrer qu'il existe $\delta \in]0;1]$ tel que, pour $|t| \leq \delta$, $|g(t)| \leq \epsilon$. (Indication : on pourra utiliser la fonction h pour un choix approprié de a et b).
5. En déduire que $\lim_0 g = 0$.
6. Montrer que g est uniformément continue. (Indication : on pourra remarquer que $|g(t) - g(t')| \leq g(t'-t)$).

Exercice 74. : On considère la fonction g définie par
$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-1/x} \quad \text{si}\, x > 0\,, \\ & & & & 0 \quad \text{si}\, x \leq 0\,. \end{array}$$

On admet le résultat suivant : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_n := \lim_{x \to a} f^{(n)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (avec $f^{(0)} = f$ et, pour $n \geq 1$, $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f). Alors f admet un prolongement par continuité F en a, F est une fonction de classe C^∞ sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(a) = l_n$.

1. Montrer que g est de classe C^∞ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme P_n, dont on précisera le degré, telle que
$$\forall x > 0\,, \quad g^{(n)}(x) \ = \ P_n\big(1/x\big) \cdot g(x)\,.$$
3. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $g^{(n)}(0)$?
4. Vérifier que g et g' sont positives, i.e., pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$.
5. Montrer les équivalences
$$\Big(\big(g(x) \ > \ 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \ > \ 0\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\big(g'(x) \ > \ 0\big) \Longleftrightarrow \quad \big(x \ > \ 0\big)\Big)\,.$$
6. Montrer que g et la fonction nulle ont, à tout ordre, le même développement de Taylor en 0.

Exercice 75. : On considère la fonction g de l'exercice 74 et on pourra utiliser sans démonstration les résultats de l'exercice 74. On définit deux nouvelles fonctions h_1 et h_2 sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad h_1(x) \;=\; g\big(x^2-1\big) \quad \text{et} \quad h_2(x) \;=\; g\big(4-x^2\big)\,.$$

1. Étude de h_1 et h_2.
   (a) Montrer que h_1 et h_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier qu'elles sont positives : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ h_1(x) \geq 0$ et $h_2(x) \geq 0$.
   (c) Établir les deux équivalences suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} \big(h_1(x) \;=\; 0\big) & \Longleftrightarrow & \big(x \in [-1;1]\big)\,, \\ \big(h_2(x) \;=\; 0\big) & \Longleftrightarrow & \big(x \notin]-2;2[\big)\,. \end{array}$$

   (d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) + h_2(x) > 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) \;=\; \frac{h_2(x)}{h_2(x)+h_1(x)}\,.$$

   (a) Vérifier que f est bien définie et est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
   (c) Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équivalence

$$\big(f(x) \;=\; 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \notin]-2;2[\big)\,.$$

   (d) Quelle est l'image réciproque $f^{-1}(1)$ de $\{1\}$ par f ?
   (e) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;-1]$ et strictement décroissante sur $[1;2]$. (Indication : on pourra exprimer la dérivée de f en fonction de g et g'.)
3. Étant donnés $a > b \geq 0$, donner (sans justification) une fonction F, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]-a;a[$, valant 1 sur $[-b;b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
4. Étant donnés $a > b \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}$, donner (sans justification) une fonction G, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]c-a;c+a[$, valant 1 sur $[c-b;c+b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq G(x) \leq 1$.
5. Montrer qu'une fonction G du 4 est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (Indication ; on pourra utiliser l'exercice 67).

Exercice 76. : Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in [0;1]$,

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}(x)\,.$$

Ici $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.

1. Montrer que f est bien définie.

2. Montrer que f est limite uniforme de la suite de fonctions en escaliers $(f_n)_n$ donnée par $f_n = \sum_{k=1}^n (1/k)\mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}$, c'est-à-dire montrer que, quand $n \to \infty$,

$$\sup_{x\in[0;1]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, \mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}(x) \right| \longrightarrow 0 .$$

3. Vérifier l'existence et calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, \mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[} .$$

   On trouve $\pi^2/6 - 1$.
4. Pourquoi f n'est-elle pas continue par morceaux ?

Exercice 77. : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} .$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{2} .$$
3. La convergence de (f_n) vers la fonction nulle est-elle uniforme ?

Exercice 78. : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $\varphi(x) = x+1$ si $x \in]-1;0]$ et $\varphi(x) = 1-x$ si $x \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = \varphi(x-n)$.

1. Montrer que la suite (φ_n) converge simplement vers la fonction nulle.
2. La convergence de (φ_n) vers la fonction nulle est-elle uniforme ?

Exercice 79. : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(\sqrt{x+4\pi^2 n^2})$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. (Indication : on pourra utiliser la 2π-périodicité de sinus).
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\sup_{x\in[0;+\infty[} f_n(x) = 1 .$$
3. La convergence de (f_n) vers la fonction nulle est-elle uniforme ?

Exercice 80. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_n(z) = (1+z/n)^n$. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leq x$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^x. (Indication : on pourra utiliser le logarithme népérien).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f_n(x) \leq e^x$. Montrer que la fonction $g_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = e^x - f_n(x)$ est croissante.

3. Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|\left(\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k} - 1\right)\frac{z^k}{k!}\right| + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}.$$

4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [0;n] \cap \mathbb{N}$, $n! \leq (n-k)! \cdot n^k$.
5. En déduire que

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leq e^{|z|} - f_n(|z|) = g_n(|z|).$$

6. Soit $r \geq 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction exponentielle complexe, uniformément sur $C(0;r)$, le cercle de centre 0 et de rayon r.
7. Soit $r \geq 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction exponentielle complexe, uniformément sur $D(0;r]$, le disque fermé de centre 0 et de rayon r. (Indication : on pourra utiliser la croissance des fonctions g_n.)

Exercice 81. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note par S_N la somme partielle d'ordre N de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ satisfait à la règle spéciale des séries alternées. Elle est donc convergente et sa somme $S(x)$ vérifie, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_{2p+1}(x) \leq S(x) \leq S_{2p}(x). \tag{20}$$

1. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge-t-elle normalement ?
2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|S(x) - S_N(x)\right| \leq \frac{1}{N}.$$

3. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge-t-elle uniformément vers f ?

Exercice 82. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right).$$

1. Montrer que, si $t \neq 0$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n(t)|$ diverge.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n(t)| \leq \ln(1+1/n)$.
3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(t)$ converge simplement.
4. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(t)$ est uniformément de Cauchy.

5. En déduire que

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Exercice 83. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivable définie par

$$f_n(t) = \int_0^{x+\frac{1}{n}} e^{-t^2(1+\frac{1}{n})}\, dt\,.$$

1. Montrer que $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x^2}$.
3. Montrer que la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers g est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
4. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une primitive de g que l'on précisera (sans la calculer).

Exercice 84. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $v_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivable définie par $v_n(t) = \ln(t+n)$.

1. Montrer que $(v_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
2. Que peut-on dire de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 85. : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f et que f est continue. Le but de l'exercice est de montrer que la convergence est en fait uniforme. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [0,p] \cap \mathbb{N}$, on pose $x_i = a + i(b-a)/p$.

1. Montrer que f est croissante.
2. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $i \in [0, p-1] \cap \mathbb{N}$, $0 \le f(x_{i+1}) - f(x_i) \le \epsilon/2$. (Indication : on pourra utiliser que f est uniformément continue).
3. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \ge N$ et tout $t \in [a;b]$, $|f_n(t) - f(t)| \le \epsilon$. (Indication : on pourra majorer séparément $f_n(t) - f(t)$ et $f(t) - f_n(t)$).

Exercice 86. : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, qu'elle converge simplement vers une fonction f et que f est continue. Le but de l'exercice est de montrer que la convergence est en fait uniforme.

1. Montrer que, pour tout $x \in [a;b]$,
$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,.$$
2. Soit $\epsilon > 0$. Soit $x \in [a;b]$. Montrer qu'il existe $N_x \in \mathbb{N}$ et $V(x)$ un voisinage ouvert de x tels que, pour $n \ge N_x$ et $t \in V(x) \cap [a;b]$, $f(t) - \epsilon \le f_n(t) \le f(t)$.
3. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \ge N$ et $t \in [a;b]$, $f(t) - \epsilon \le f_n(t) \le f(t)$. (Indication : on pourra utiliser le fait que $[a;b]$ est compact).

Exercice 87. : Soit E l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. C'est même une algèbre avec le produit usuel de fonctions. Pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\,.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = 0$, si $|x-n| \geq 1$, $\varphi_n(x) = x-(n-1)$, si $n-1 \leq x \leq n$ et $\varphi_n(x) = -x+(n+1)$, si $n \leq x \leq n+1$. Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille libre de E. En particulier, E est de dimension infinie.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie sur E et que c'est une norme.
3. Vérifier que, pour tout $(f,g) \in E^2$, $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty$. Donner un exemple de $(f;g) \in E^2$ tel que $\|fg\|_\infty < \|f\|_\infty\|g\|_\infty$.
4. Montrer que, pour tout $(f,g) \in E^2$, $|\,\|f\|_\infty - \|g\|_\infty\,| \leq \|f-g\|_\infty$.
5. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E et $f \in E$ tels que la suite réelle $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ tend vers 0. Montrer que la suite réelle $(\|f_n\|_\infty)_n$ tend vers $\|f\|_\infty$.

On remarque qu'une suite $(f_n)_n$ d'éléments de E converge uniformément vers $f \in E$ si et seulement si la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|)$.

Exercice 88. : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $\varphi(x) = x+1$ si $x \in]-1;0]$ et $\varphi(x) = 1-x$ si $x \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction nulle. Vérifier que $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi_n(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. En déduire que φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1.
3. Soit $\eta \in]0;1]$. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1;-\eta] \cup [\eta;1]$ vers la fonction nulle. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{-\eta} |\varphi_n(t)|\,dt \;+\; \int_{\eta}^{+\infty} |\varphi_n(t)|\,dt\right) \;=\; 0\,.$$
4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\varphi_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt \;=\; f(0)\,. \tag{21}$$
Indication : on pourra écrire $f(0) = \int_{\mathbb{R}} f(0)\varphi_n(t)\,dt$, utiliser le fait que chaque φ_n est positive et les questions précédentes.
5. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la limite (21) ?

Exercice 89. : Théorème de Borel.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de nombres complexes. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$. Ici $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n$ième de f.
On note par χ la fonction f du 2 de l'exercice 75. On se donne une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $\lambda_k > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f_k(x) \;=\; \frac{a_k x^k}{k!} \cdot \chi(\lambda_k x)\,.$$

1. Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi^{(n)}(y) = 0$ si $|y| \leq 1$ ou $|y| \geq 2$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \|\chi^{(n)}\|_\infty \ := \ \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|\chi^{(n)}(y)\right| \ < \ +\infty\,.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que $f_k(x) = 0$ si $|x| \geq 2\lambda_k^{-1}$ et que $f_k(x) = 1$ si $|x| \leq \lambda_k^{-1}$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et $g_\ell : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_\ell(x) = x^\ell$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée $n$ième de g_ℓ est donnée par

$$g_\ell^{(n)}(x) \ = \ \ell(\ell-1)\cdots(\ell-n+1)\,x^{\ell-n} \ = \ \frac{\ell!}{(\ell-n)!}\,x^{\ell-n}\,.$$

   avec la convention que $g_\ell^{(n)}(x) = 0$ si $n > \ell$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $b_n \geq 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k > n$, on ait

$$\|f_k^{(n)}\|_\infty \ := \ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_k^{(n)}(x)\right| \ \leq \ b_n \cdot 2^k |a_k| \cdot \lambda_k^{n-k}\,.$$

   (Indication : on pourra utiliser la formule de Leibnitz pour calculer $f_k^{(n)}$).
5. On choisit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = 4^k(|a_k|+1) > 0$. Montrer que, pour tout n, la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k^{(n)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
6. Soit f la somme de la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Vérifier qu'elle est bien définie et que c'est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $f^{(n)}(0) = a_n$.

Exercice 90. : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = nx$.

1. Vérifier que le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement est $\{0\}$.
2. Construire une fonction $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $0 \leq \tau \leq 1$, $\tau(0) = 1$ et, pour $|x| \geq 1$, $\tau(x) = 0$. (Indication : utiliser l'exercice 75).
3. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $g_n = \tau \circ f_n$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on explicitera. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
4. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $k_n = (n+1)^{-1/2} g_n$. Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Montrer que la suite $(k_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? (Indication : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\tau'(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\tau'(y)| > 0$).

Exercice 91. : Escalier de Cantor.
L'objectif de cet exercice est de construire une fonction continue croissante $g : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, g est dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R} \setminus C$, où C est l'ensemble triadique de Cantor de l'exercice 4 du contrôle continu du 6 mars 2015 (voir aussi les exercices 55 et 56). On rappelle que C est une partie compacte de $[0;1]$ d'intérieur vide et que l'ensemble $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus C$ est une réunion infinie d'intervalles ouverts et disjoints

dont la "longueur totale" est 1.
On utilise les notations et les résultats des exercices 55 et 56 et aussi de l'exercice 4 du contrôle continu du 6 mars 2015.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in G_p$, on choisit une valeur c_a dans la fermeture $\overline{I(a)}$ de $I(a)$. On décide que la restriction de g à un tel intervalle $I(a)$ est constante égale à c_a. Il reste à définir g sur C. On pose

$$g(0) \;=\; \inf_{y\in\mathcal{O}} g(y)\;, \quad g(1) \;=\; \sup_{y\in\mathcal{O}} g(y)\;,$$

et, pour $x \in C \setminus \{0;1\}$,

$$g(x) \;=\; 2^{-1}\cdot\left(\inf_{\substack{y\in\mathcal{O}\\ y>x}} g(y) \;+\; \sup_{\substack{y\in\mathcal{O}\\ y<x}} g(y)\right).$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on construit une application réelle g_p sur $[0;1]$ de la façon suivante. Pour $r \in \mathbb{N}\cap[1;p]$, pour $a \in G_r$, la restriction de g_p à l'intervalle $I(a)$ est constante égale à c_a. Sur l'intervalle $I_{p;0} = [0; f(a)]$, pour un $a \in G_p$, on pose $g_p(x) = c_a(f(a))^{-1}x$. Sur l'intervalle $I_{p;2^p-1} = [f(a')+3^{-p};1]$, pour un $a' \in G_p$, on pose

$$g_p(x) \;=\; 1 \;+\; \frac{c_{a'}-1}{f(a')+3^{-p}-1}\cdot(x-1)\,.$$

Enfin, pour $k \in \mathbb{N}\cap]0;2^p-1[$, sur un intervalle $I_{p;k} = [f(a)+3^{-p}; f(a')]$, pour un $a \in G_r$ et un $r \in \mathbb{N}\cap[1;p]$ et pour un $a' \in G_{r'}$ et un $r' \in \mathbb{N}\cap[1;p]$, on pose

$$g_p(x) \;=\; c_a \;+\; \frac{c_{a'}-c_a}{f(a')-f(a)-3^{-p}}\cdot\left(x-f(a)-3^{-p}\right).$$

1. Pour $p \in \{1;2;3\}$, donner explicitement G_p, les intervalles ouverts $I(a)$, pour $a \in G_p$, et les intervalles fermés $I_{p;k}$, $k \in \mathbb{N}\cap[0;2^p-1]$.
2. Dessiner dans un même schéma les graphes des fonctions g_1, g_2 et g_3, dans le cas où, pour $r \in \{1;2;3\}$ et $a \in G_r$, $c_a = f(a)$.
3. Dessiner dans un même schéma les graphes des fonctions g_1, g_2 et g_3, dans le cas où, pour $r \in \{1;2;3\}$ et $a \in G_r$, $c_a = f(a)+3^{-r}$.
4. Dessiner dans un même schéma les graphes des fonctions g_1, g_2 et g_3, dans le cas où, pour $r \in \{1;2;3\}$ et $a \in G_r$, $c_a = f(a)+2^{-1}3^{-r}$.
5. Vérifier que g est bien définie et à valeurs dans $[0;1]$. Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, g_p est continue et que $g_p([0;1]) = [0;1]$.
6. Vérifier que g est croissante. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, vérifier que g_p est croissante.
7. Vérifier que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.
8. Vérifier que g est dérivable sur $\mathcal{O}$ et que sa dérivée y est nulle.
9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   a). Montrer que, pour $x \in I_{p;0}$, $0 \le g(x) \le L(I_{p;0})$ et $0 \le g_p(x) \le L(I_{p;0})$.

b). Montrer que, pour $x \in I_{p;2^p-1}$, $0 \leq 1 - g(x) \leq L(I_{p;2^p-1})$ et $0 \leq 1 - g_p(x) \leq L(I_{p;2^p-1})$.

c). Soit $k \in \mathbb{N} \cap]0; 2^p - 1[$ et $x \in I_{p;k}$. On sait que $I_{p;k} = [f(a) + 3^{-p}; f(a')]$, pour un $a \in G_r$ et un $r \in \mathbb{N} \cap [1; p]$ et pour un $a' \in G_{r'}$ et un $r' \in \mathbb{N} \cap [1; p]$. Montrer que $c_a \leq g(x) \leq c_{a'}$ et $c_a \leq g_p(x) \leq c_{a'}$.

d). Déduire des questions précédentes que

$$\sup_{x \in [0;1]} |g(x) - g_p(x)| \;\leq\; 3 \cdot 3^{-p}\,.$$

10. En déduire que g est continue.