Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Approfondissements, S4.

Uniforme continuité, critère de Cauchy, convergence uniforme.

Exercice 74. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 75. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \ < \ +\infty \, .$$

Montrer que f est uniformément continue. Application : montrer que sinus et cosinus sont uniformément continues.

Exercice 76. : Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne si

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \, , \quad |f(x) - f(y)| \ \leq \ k \cdot |x-y| \, .$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit k-lipschitzienne.

1. Trouver toutes les fonctions 0-lipschitziennes.
2. Montrer que la fonction f de l'exercice 74 est $|a|$-lipschitzienne.
3. Montrer que la fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne.
4. Montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue (donc continue).
5. Pour $k > 0$, donner une fonction k-lipschitzienne qui n'est pas dérivable partout.
6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne avec $k \in \mathbb{R}^+$. Soit D l'ensemble des points où f admet une dérivée. Montrer que

$$\sup_{x\in D} |f'(x)| \ \leq \ k \, .$$

   Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(0) - kx \leq f(x) \leq f(0) + kx$ et, pour tout $x \leq 0$, $f(0) + kx \leq f(x) \leq f(0) - kx$.

Exercice 77. : On utilise les exercices 10 et 76. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour $a \in \mathbb{R}$, soit φ_a la fonction donnée par (4) avec $I = \mathbb{R}$ (cf. exercice 11). Par convexité, φ_a est croissante donc ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ existent (cf. exercice 10).

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \varphi_a = \lim\limits_{-\infty} \varphi_0$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi_a = \lim\limits_{+\infty} \varphi_0$.
2. On suppose que f est k-lipschitzienne, pour un $k \geq 0$. Montrer que les limites $\lim\limits_{-\infty} \varphi_0$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi_0$ sont finies et vérifient $-k \leq \lim\limits_{-\infty} \varphi_0 \leq \lim\limits_{+\infty} \varphi_0 \leq k$.

3. On suppose que les $\lim\limits_{-\infty}\varphi_0$ et $\lim\limits_{+\infty}\varphi_0$ sont finies. Soit $k = \max(|\lim\limits_{-\infty}\varphi_0|; |\lim\limits_{+\infty}\varphi_0|)$. Pour $a < b$, montrer que

$$\lim_{-\infty}\varphi_0 \;\leq\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;\leq\; \lim_{+\infty}\varphi_0\,. \tag{21}$$

(Indication : on pourra utiliser 1). En déduire que f est k-lipschitzienne.

4. Pour $k > 0$, donner une fonction k-lipschitzienne et convexe qui n'est pas dérivable partout.

Exercice 78. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On montre qu'elle est uniformément continue.

1. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que, pour tout $x \in [a;b]$, il existe un $\delta_x > 0$ tel que

$$f\big([a;b] \cap]x-3\delta_x; x+3\delta_x[\big) \;\subset\;]f(x)-\epsilon/3; f(x)+\epsilon/3[\,.$$

2. Montrer qu'il existe une famille finie $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de $[a;b]$ tel que

$$[a;b] \;\subset\; \bigcup_{i\in J}]x_j-\delta_{x_j}; x_j+\delta_{x_j}[\,.$$

3. Soit $\delta = \min\{\delta_{x_j}; j \in J\} > 0$. Montrer que, pour $(x;y) \in [a;b]^2$ tel que $|x-y| < \delta$, $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.

Exercice 79. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que ses limites $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ existent et vérifient $f(0) > \lim\limits_{+\infty} f$ et $f(0) > \lim\limits_{-\infty} f$. Montrer que f a un maximum.

Exercice 80. : Soit $f, g :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{E(1/x)} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{et} \quad g(x) \;=\; \sum_{k=1}^{E(1/x)} \frac{(-1)^k}{k+x}\,.$$

Montrer que $\lim\limits_{0} f$ et $\lim\limits_{0} g$ existent et sont finies. (Indication : on pourra utiliser la règle spéciale des séries alternées et le critère de Cauchy).

Exercice 81. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \;<\; +\infty\,.$$

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit

$$g(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(x) \;-\; f(x-t)\big|\,dx\,.$$

Vérifier que g est bien définie.

2. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit

$$h(t) \;=\; \int_a^b \big|f(x) \;-\; f(x-t)\big|\, dx\,.$$

Montrer que $\lim\limits_{0} h \;=\; 0$. (Indication : on pourra utiliser que f est uniformément continue sur $[a-1;b+1]$).

3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(x)|\, dx \;+\; \int_A^{+\infty} |f(x)|\, dx \;<\; \frac{\epsilon}{4}\,.$$

4. Montrer qu'il existe $\delta \in]0;1]$ tel que, pour $|t| \leq \delta$, $|g(t)| \leq \epsilon$. (Indication : on pourra utiliser la fonction h pour un choix approprié de a et b).
5. En déduire que $\lim\limits_{0} g = 0$.
6. Montrer que g est uniformément continue. (Indication : on pourra remarquer que $|g(t) - g(t')| \leq g(t' - t)$).

Exercice 82. : On considère la fonction g définie par

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-1/x} \quad \text{si}\, x > 0\,, \\ & & & & 0 \quad\quad \text{si}\, x \leq 0\,. \end{array}$$

On admet le résultat suivant : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \backslash \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_n := \lim\limits_{x \to a} f^{(n)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (avec $f^{(0)} = f$ et, pour $n \geq 1$, $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f). Alors f admet un prolongement par continuité F en a, F est une fonction de classe C^∞ sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(a) = l_n$.

1. Montrer que g est de classe C^∞ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme P_n, dont on précisera le degré, telle que

$$\forall x > 0\,, \quad g^{(n)}(x) \;=\; P_n\big(1/x\big) \cdot g(x)\,.$$

3. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $g^{(n)}(0)$?
4. Vérifier que g et g' sont positives, i.e., pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$.
5. Montrer les équivalences

$$\Big(\big(g(x) \;>\; 0\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(x \;>\; 0\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\big(g'(x) \;>\; 0\big) \Longleftrightarrow \quad \big(x \;>\; 0\big)\Big)\,.$$

6. Montrer que g et la fonction nulle ont, à tout ordre, le même développement de Taylor en 0.

Exercice 83. : On considère la fonction g de l'exercice 82 et on pourra utiliser sans démonstration les résultats de l'exercice 82. On définit deux nouvelles fonctions h_1 et h_2 sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad h_1(x) \;=\; g\big(x^2-1\big) \quad \text{et} \quad h_2(x) \;=\; g\big(4-x^2\big)\,.$$

1. Étude de h_1 et h_2.
   (a) Montrer que h_1 et h_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier qu'elles sont positives : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\, h_1(x) \geq 0$ et $h_2(x) \geq 0$.
   (c) Établir les deux équivalences suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \big(h_1(x) \;=\; 0\big) & \Longleftrightarrow & \big(x \in [-1;1]\big)\,, \\ \big(h_2(x) \;=\; 0\big) & \Longleftrightarrow & \big(x \notin]-2;2[\big)\,. \end{array}$$

   (d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) + h_2(x) > 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) \;=\; \frac{h_2(x)}{h_2(x) + h_1(x)}\,.$$

   (a) Vérifier que f est bien définie et est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
   (c) Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équivalence

$$\big(f(x) \;=\; 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \notin]-2;2[\big)\,.$$

   (d) Quelle est l'image réciproque $f^{-1}(1)$ de $\{1\}$ par f ?
   (e) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;-1]$ et strictement décroissante sur $[1;2]$. (Indication : on pourra exprimer la dérivée de f en fonction de g et g'.)
3. Étant donnés $a > b \geq 0$, donner (sans justification) une fonction F, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]-a;a[$, valant 1 sur $[-b;b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
4. Étant donnés $a > b \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}$, donner (sans justification) une fonction G, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]c-a;c+a[$, valant 1 sur $[c-b;c+b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq G(x) \leq 1$.
5. Montrer qu'une fonction G du 4 est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (Indication ; on pourra utiliser l'exercice 75).

Exercice 84. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) \;=\; \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}\,.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_n(x) \;=\; \frac{1}{2}\,.$$
3. La convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la fonction nulle est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
4. Montrer que la convergence est uniforme sur $[2;+\infty[$.

Exercice 85. : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $\varphi(x) = x+1$ si $x \in]-1;0]$ et $\varphi(x) = 1 - x$ si $x \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = \varphi(x-n)$.

1. Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
2. La convergence de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction nulle est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$, la convergence de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction nulle est uniforme sur $]-\infty;a]$.

Exercice 86. : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(\sqrt{x + 4\pi^2 n^2})$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. (Indication : on pourra utiliser la 2π-périodicité de sinus).
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\sup_{x \in [0;+\infty[} f_n(x) \;=\; 1\,.$$
3. La convergence de (f_n) vers la fonction nulle est-elle uniforme sur $[0;+\infty[$?

Exercice 87. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_n(z) = (1 + z/n)^n$. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leq x$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^x. (Indication : on pourra utiliser le logarithme népérien).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f_n(x) \leq e^x$. Montrer que la fonction $g_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = e^x - f_n(x)$ est croissante.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \;\leq\; \sum_{k=0}^{n} \left|\left(\frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k} - 1\right)\frac{z^k}{k!}\right| \;+\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}\,.$$
4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [0;n] \cap \mathbb{N}$, $n! \leq (n-k)! \cdot n^k$.
5. En déduire que
$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \;\leq\; e^{|z|} - f_n(|z|) \;=\; g_n(|z|)\,.$$
6. Soit $r \geq 0$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction exponentielle complexe, uniformément sur $C(0;r)$, le cercle de centre 0 et de rayon r.
7. Soit $r \geq 0$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction exponentielle complexe, uniformément sur $D(0;r]$, le disque fermé de centre 0 et de rayon r. (Indication : on pourra utiliser la croissance des fonctions g_n.)

Exercice 88. : Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\varphi(x) = \exp(ix)$. On a vu dans le cours que φ est bien définie (i.e. à valeurs dans $\mathbb{S}^1$). On définit les fonctions cosinus et sinus par $\cos(x) = \Re(\varphi(x))$ et $\sin(x) = \Im(\varphi(x))$, pour $x \in \mathbb{R}$. Pour $b \in \mathbb{R}$, on note par $b\mathbb{Z}$ le sous-ensemble de $(\mathbb{R}; +)$ constitué des nb, pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que φ et la fonction $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, définie par $\overline{\varphi}(x) = \exp(-ix)$, sont de classe C^1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = i\varphi(x)$. En déduire que cos et sin sont aussi de classe C^1, que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$, et que φ n'est pas la fonction constante égale à 1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}$.
2. Montrer que, pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$. On pose $K = \varphi^{-1}(1)$ et $a = \inf(K \cap \mathbb{R}^{+*}) \geq 0$. Montrer que, pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = \varphi(y)$ si et seulement si $x - y \in K$.
3. On suppose que $a = 0$.
   a). Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $K \cap]y - \epsilon; y + \epsilon[\neq \emptyset$. (Indication : on pourra montrer l'existence d'un $b \in]0; \epsilon[\cap K$ et effectuer la division euclidienne de y par b.)
   b). Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K qui converge vers y.
   c). Montrer que $\varphi(y) = 1$.
   d). En déduire une contradiction.
4. Par la question précédente, on sait que $a > 0$.
   a). Montrer que $\varphi(a) = 1$.
   b). En déduire que $a\mathbb{Z} \subset K$.
   c). Montrer par l'absurde que $K \subset a\mathbb{Z}$. (Indication : on pourra utiliser la division euclidienne par a.)
5. Par les questions précédentes, on sait que $K = a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$. On verra plus loin que $a = 2\pi$, où π est le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.
   a). Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ données par $z^2 = 1$ et $z^2 = -1$.
   b). En déduire que $\varphi(a/2) = -1$ et $\varphi(a/4) \in \{-i; i\}$.
   c). On suppose qu'il existe $x \in]0; a/2[$ tel que $\sin(x) = 0$. Montrer qu'alors $\varphi(x) \in \{-1; 1\}$. En déduire une contradiction.
   d). Montrer que sin est strictement positive sur $]0; a/2[$. En déduire que $\varphi(a/4) = i$.
   e). Montrer que l'image $\cos([0; a/4])$ de l'intervalle $[0; a/4]$ par la fonction cos est l'intervalle $[0; 1]$.
6. On montre dans cette question que φ est surjective.
   a). Soit $z \in \mathbb{S}^1$. Montrer que l'un des complexes parmi z, $\overline{z}$, $-z$ ou $-\overline{z}$ a ses parties réelle et imaginaire positives.
   b). Soit $z \in \mathbb{S}^1$ ayant des parties réelle et imaginaire positives. Montrer que $z \in \varphi([0; a/4])$.
   c). En déduire que $\mathbb{S}^1 = \varphi(]-a/2; a/2])$. Vérifier que la restriction de φ à l'intervalle $]-a/2; a/2]$ est injective.
7. Détermination de a. On rappelle que la longueur de l'image, notée $\mathrm{Im}\gamma$, d'une courbe paramétrée $\gamma :]t_0; t_1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, avec $t_0 < t_1$, donnée par $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ et de classe C^1, est

$$L(\mathrm{Im}\gamma) \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,.$$

a). Montrer que $\mathbb{S}^1$ est l'image d'une courbe paramétrée injective de classe C^1. Calculer sa longueur en fonction de a.

b). Montrer que le rapport de la circomférence d'un cercle à son diamètre est $a/2$. **Par définition de π, on a donc $a = 2\pi$.**

Commentaire : L'application φ ci-dessus donne une réalisation analytique des notions géométriques d'angle orienté de demi-droites et de mesure d'angle. Pour $z \in \mathbb{S}^1$, les mesures de l'angle orienté des demi-droites $[0; z)$ et $[0; 1)$ du plan complexe sont les éléments de $\varphi^{-1}(z)$. Elles diffèrent les unes des autres d'un multiple entier de 2π. Ce qu'on appelle angle orienté de demi-droites associé à z est cet ensemble $\varphi^{-1}(z)$.

Exercice 89. : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = nx$.

1. Vérifier que le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement est $\{0\}$.
2. Construire une fonction $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $0 \leq \tau \leq 1$, $\tau(0) = 1$ et, pour $|x| \geq 1$, $\tau(x) = 0$. (Indication : utiliser l'exercice 83).
3. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $g_n = \tau \circ f_n$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on explicitera. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
4. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $k_n = (n+1)^{-1/2} g_n$. Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Montrer que la suite $(k'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? (Indication : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\tau'(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\tau'(y)| > 0$).

Exercice 90. : Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in [0; 1]$,

$$f(x) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \, \mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}(x) \, .$$

Ici $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est limite uniforme de la suite de fonctions en escaliers $(f_n)_n$ donnée par $f_n = \sum_{k=1}^{n} (1/k) \mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}$, c'est-à-dire montrer que, quand $n \to \infty$,
$$\sup_{x\in[0;1]} \left| f(x) \ - \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \, \mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[}(x) \right| \ \longrightarrow \ 0 \, .$$
3. Vérifier l'existence et calculer la limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \, \mathbb{1}_{]1/(k+1);1/k[} \, .$$
On trouve $\pi^2/6 - 1$.
4. Pourquoi f n'est-elle pas continue par morceaux ?

Exercice 91. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) \;=\; \frac{(-1)^n}{n + x^2}\,.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note par S_N la somme partielle d'ordre N de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ satisfait à la règle spéciale des séries alternées. Elle est donc convergente et sa somme $S(x)$ vérifie, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_{2p+1}(x) \;\le\; S(x) \;\le\; S_{2p+2}(x)\,. \tag{22}$$

1. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge-t-elle normalement ?
2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\big|S(x) \,-\, S_N(x)\big| \;\le\; \frac{1}{N}\,.$$
3. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge-t-elle uniformément vers S ?

Exercice 92. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(t) \;=\; (-1)^n \,\ln\!\left(1 \,+\, \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right).$$

1. Montrer que, si $t \neq 0$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n(t)|$ diverge.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n(t)| \le \ln(1 + 1/n)$.
3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(t)$ converge simplement.
4. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(t)$ est uniformément de Cauchy.
5. En déduire que
$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \,\ln\!\left(1 \,+\, \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \,\ln\!\left(1 \,+\, \frac{1}{n}\right).$$

Exercice 93. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivable définie par

$$f_n(x) \;=\; \int_0^{x+\frac{1}{n}} e^{-t^2(1+\frac{1}{n})}\,dt\,.$$

1. Montrer que $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x^2}$.
3. Montrer que la convergence de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers g est uniforme sur $[0;1]$.
4. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une primitive de g que l'on précisera (sans la calculer).

Exercice 94. : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $v_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction dérivable définie par $v_n(t) = \ln(t + n)$.

1. Montrer que $(v_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
2. Que peut-on dire de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 95. : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$, $\varphi(x) = x+1$ si $x \in]-1;0]$ et $\varphi(x) = 1-x$ si $x \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction nulle. Vérifier que $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi_n(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. En déduire que φ_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1.
3. Soit $\eta \in]0;1]$. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1;-\eta] \cup [\eta;1]$ vers la fonction nulle. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_{-\infty}^{-\eta} |\varphi_n(t)|\, dt \; + \; \int_{\eta}^{+\infty} |\varphi_n(t)|\, dt \Big) \;=\; 0\,.$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\varphi_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)\, dt \;=\; f(0)\,. \tag{23}$$

   Indication : on pourra écrire $f(0) = \int_{\mathbb{R}} f(0)\varphi_n(t)\, dt$, utiliser le fait que chaque φ_n est positive et les questions précédentes.
5. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la limite (23) ?

Exercice 96. : Soit F un $\mathbb{K}$-e.v.n. de dimension finie $d \geq 1$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soit $v \in F$ et $f : [0;1] \longrightarrow F$ la fonction constante égale à v. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\, dt \;=\; v\,.$$

2. Soit $v \in F$ et $\alpha : [0;1] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_0^1 \alpha(t) v\, dt \;=\; \Big(\int_0^1 \alpha(t)\, dt \Big) \cdot v\,.$$

3. Soit $f : [0;1] \longrightarrow F$. Soit $\mathcal{B} = (e_1; \cdots; e_d)$ une base de F. Pour $k \in [1;d] \cap \mathbb{N}$, soit $f_k : [0;1] \longrightarrow F$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_1(x); \cdots; f_d(x))$ soit les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.
   a). Montrer que f est continue si et seulement si, pour tout $k \in [1;d] \cap \mathbb{N}$, f_k est continue.
   b). On suppose que f est continue. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\, dt \;=\; \sum_{k=1}^{d} \Big(\int_0^1 f_k(t)\, dt \Big) \cdot e_k\,.$$

4. Soit $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 à coefficients réels. Vérifier que les matrices
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
forment une base de $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par
$$f(t) = \begin{pmatrix} 2 & t \\ e^t & te^t \end{pmatrix}.$$
Vérifier que f est continue et montrer que
$$\int_0^1 f(t)\, dt = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ e-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 97. : Soit E l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. C'est même une algèbre avec le produit usuel de fonctions. Pour $f \in E$, on pose :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = 0$, si $|x - n| \geq 1$, $\varphi_n(x) = x - (n-1)$, si $n - 1 \leq x \leq n$ et $\varphi_n(x) = -x + (n+1)$, si $n \leq x \leq n+1$. Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille libre de E. En particulier, E est de dimension infinie.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie sur E et que c'est une norme.
3. Vérifier que, pour tout $(f, g) \in E^2$, $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty$. Donner un exemple de $(f; g) \in E^2$ tel que $\|fg\|_\infty < \|f\|_\infty\|g\|_\infty$.
4. Montrer que, pour tout $(f, g) \in E^2$, $|\,\|f\|_\infty - \|g\|_\infty\,| \leq \|f - g\|_\infty$.
5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $f \in E$ tels que la suite réelle positive $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que la suite réelle positive $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\|f\|_\infty$.
6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E (muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$).
   a). Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans le complet $\mathbb{K}$. En déduire qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f.
   b). Montrer que la convergence précédente est uniforme sur $\mathbb{R}$.
   c). En déduire que $f \in E$.
   d). Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans E (c'est-à-dire pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Remarque : Une suite $(f_n)_n$ d'éléments de E converge uniformément vers $f \in E$ si et seulement si la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$. La question 6 montre que cet espace est complet.

Exercice 98. : Soit F un $\mathbb{K}$-e.v.n. de dimension finie $d \geq 1$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow F$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1; \cdots; e_d)$ une base de F. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [1; d] \cap \mathbb{N}$, soit $f_{k;n} : \mathbb{R} \longrightarrow F$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_{1;n}(x); \cdots; f_{d;n}(x))$ soit les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $k \in [1; d] \cap \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(f_{k;n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que le résultat précédent est encore vrai si l'on remplace “convergence simple” par “convergence uniforme”.
3. Soit $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 à coefficients réels. On le munit d'une norme quelconque notée $\|\cdot\|$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x^2+1+n} \\ \left(1 - \frac{1}{2(1+x^2)}\right)^n & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} .$$

   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera. (Indication : on pourra utiliser le 2 et la base de F donnée dans le 4 de l'exercice 96.)

Exercice 99. : Soit ℓ^∞ l'espace vectoriel réel des suites réelles, bornées et définies sur $\mathbb{N}$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par, pour $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$\|a\|_\infty \;=\; \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| .$$

On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies sur $[0; 1]$ et à valeurs dans ℓ^∞ par, pour $x \in [0; 1]$,

$$f_n(x) \;=\; \left(\frac{x^n}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad g_n(x) \;=\; \left(\left(x - \frac{1}{k+2}\right)^n\right)_{k\in\mathbb{N}} .$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère $(f_{p;n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_{p;n})_{n\in\mathbb{N}}$, les suites de fonctions définies sur $[0; 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par, pour $x \in [0; 1]$,

$$f_{p;n}(x) \;=\; \frac{x^n}{p+1} \quad \text{et} \quad g_{p;n}(x) \;=\; \left(x - \frac{1}{p+2}\right)^n .$$

On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$, $f_{p;n}(x)$ est le terme d'indice p de la suite $f_n(x) \in \ell^\infty$.
Enfin, pour $p \in \mathbb{N}$, soit $e^{(p)} \in \ell^\infty$ définie par $e^{(p)}_k = 1$ si $k = p$ et $e^{(p)}_k = 0$ sinon.

1. Montrer que $(e^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de ℓ^∞. En particulier, ℓ^∞ est de dimension infinie.
2. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(g_{p;n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle sur $[0; 1]$.
3. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(f_{p;n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers une fonction $f_{(p)}$ que l'on précisera. Cette convergence est-elle uniforme sur $[0; 1]$? Sur $[0; \delta]$, pour $\delta \in [0; 1[$?

4. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on précisera. Vérifier que, pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1]$, $f(x)_p$, le terme d'indice p de la suite $f(x)\in\ell^\infty$, vaut $f_{(p)}(x)$.
5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $x_n = 1-(n+1)^{-2}$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\big\|f_n(x_n) \;-\; f(x_n)\big\|_\infty \;=\; x_n^n\,.$$
Vérifier que $\lim_{n\to\infty} x_n^n = 1$. En déduire que la converge de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$ vers f n'est pas uniforme sur $[0;1]$. Est-elle uniforme sur $[0;\delta]$, pour $\delta\in[0;1[$?
6. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction nulle (de $[0;1]$ dans ℓ^∞).
7. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in[0;1]$, montrer que $\|g_n(x)\|_\infty \geq x^n$. En déduire que
$$\sup_{x\in[0;1]} \|g_n(x)\|_\infty \;\geq\; 1\,.$$
En déduire que la convergence de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniforme sur $[0;1]$.

Remarque : La famille $(e^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base algébrique de ℓ^∞. La suite $((n+1)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ appartient bien à ℓ^∞ mais ne peut s'écrire comme combinaison linéaire finie des $e^{(p)}$. La situation est donc différente de celle de l'exercice 98.

Exercice 100. : Soit $a<b$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère $f_n : [a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f et que f est continue. Le but de l'exercice est de montrer que la convergence est en fait uniforme. Pour $p\in\mathbb{N}^*$ et $i\in[0,p]\cap\mathbb{N}$, on pose $x_i = a+i(b-a)/p$.

1. Montrer que f est croissante.
2. Soit $\epsilon>0$. Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $i\in[0,p-1]\cap\mathbb{N}$, $0\leq f(x_{i+1})-f(x_i)\leq\epsilon/2$. (Indication : on pourra utiliser que f est uniformément continue).
3. Montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq N$ et tout $t\in[a;b]$, $|f_n(t)-f(t)|\leq\epsilon$. (Indication : on pourra majorer séparément $f_n(t)-f(t)$ et $f(t)-f_n(t)$).

Exercice 101. : Soit $a<b$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n : [a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, qu'elle converge simplement vers une fonction f et que f est continue. Le but de l'exercice est de montrer que la convergence est en fait uniforme.

1. Montrer que, pour tout $x\in[a;b]$,
$$f(x) \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,.$$
2. Soit $\epsilon>0$. Soit $x\in[a;b]$. Montrer qu'il existe $N_x\in\mathbb{N}$ et $V(x)$ un voisinage ouvert de x tels que, pour $n\geq N_x$ et $t\in V(x)\cap[a;b]$, $f(t)-\epsilon\leq f_n(t)\leq f(t)$.
3. Montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour $n\geq N$ et $t\in[a;b]$, $f(t)-\epsilon\leq f_n(t)\leq f(t)$. (Indication : on pourra utiliser le fait que $[a;b]$ est compact).

Exercice 102. : Théorème de Borel.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de nombres complexes. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$. Ici $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n$ième de f.
On note par χ la fonction f du 2 de l'exercice 83. On se donne une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $\lambda_k > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f_k(x) \;=\; \frac{a_k x^k}{k!} \cdot \chi(\lambda_k x)\,.$$

1. Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi^{(n)}(y) = 0$ si $|y| \leq 1$ ou $|y| \geq 2$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad \|\chi^{(n)}\|_\infty \;:=\; \sup_{y\in\mathbb{R}} \big|\chi^{(n)}(y)\big| \;<\; +\infty\,.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que $f_k(x) = 0$ si $|x| \geq 2\lambda_k^{-1}$ et que $f_k(x) = 1$ si $|x| \leq \lambda_k^{-1}$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et $g_\ell : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_\ell(x) = x^\ell$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée $n$ième de g_ℓ est donnée par

$$g_\ell^{(n)}(x) \;=\; \ell(\ell-1)\cdots(\ell-n+1)\,x^{\ell-n} \;=\; \frac{\ell!}{(\ell-n)!}\,x^{\ell-n}\,.$$

   avec la convention que $g_\ell^{(n)}(x) = 0$ si $n > \ell$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $b_n \geq 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k > n$, on ait

$$\|f_k^{(n)}\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f_k^{(n)}(x)\big| \;\leq\; b_n \cdot 2^k |a_k| \cdot \lambda_k^{n-k}\,.$$

   (Indication : on pourra utiliser la formule de Leibnitz pour calculer $f_k^{(n)}$).
5. On choisit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = 4^k(|a_k|+1) > 0$. Montrer que, pour tout n, la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k^{(n)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
6. Soit f la somme de la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Vérifier qu'elle est bien définie et que c'est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $f^{(n)}(0) = a_n$.

Exercice 103. : Escalier de Cantor.
L'objectif de cet exercice est de construire une fonction continue croissante $g : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, g est dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R} \setminus C$, où C est l'ensemble triadique de Cantor de l'exercice 4 du contrôle continu du 6 mars 2015 (voir aussi les exercices 63 et 64). On rappelle que C est une partie compacte de $[0;1]$ d'intérieur vide et que l'ensemble $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus C$ est une réunion infinie d'intervalles ouverts et disjoints dont la "longueur totale" est 1.
On utilise les notations et les résultats des exercices 63 et 64 et aussi de l'exercice 4 du contrôle continu du 6 mars 2015.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in G_p$, on choisit une valeur c_a dans la fermeture $\overline{I(a)}$ de $I(a)$.

On décide que la restriction de g à un tel intervalle $I(a)$ est constante égale à c_a. Il reste à définir g sur C. On pose

$$g(0) \;=\; \inf_{y\in\mathcal{O}} g(y)\,, \quad g(1) \;=\; \sup_{y\in\mathcal{O}} g(y)\,,$$

et, pour $x \in C \setminus \{0;1\}$,

$$g(x) \;=\; 2^{-1}\cdot\left(\inf_{\substack{y\in\mathcal{O}\\ y>x}} g(y) \;+\; \sup_{\substack{y\in\mathcal{O}\\ y<x}} g(y)\right).$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on construit une application réelle g_p sur $[0;1]$ de la façon suivante. Pour $r \in \mathbb{N}\cap[1;p]$, pour $a \in G_r$, la restriction de g_p à l'intervalle $I(a)$ est constante égale à c_a. Sur l'intervalle $I_{p;0} = [0; f(a)]$, pour un $a \in G_p$, on pose $g_p(x) = c_a(f(a))^{-1}x$. Sur l'intervalle $I_{p;2^p-1} = [f(a') + 3^{-p}; 1]$, pour un $a' \in G_p$, on pose

$$g_p(x) \;=\; 1 \;+\; \frac{c_{a'}-1}{f(a')+3^{-p}-1}\cdot(x-1)\,.$$

Enfin, pour $k \in \mathbb{N}\cap]0;2^p-1[$, sur un intervalle $I_{p;k} = [f(a)+3^{-p}; f(a')]$, pour un $a \in G_r$ et un $r \in \mathbb{N}\cap[1;p]$ et pour un $a' \in G_{r'}$ et un $r' \in \mathbb{N}\cap[1;p]$, on pose

$$g_p(x) \;=\; c_a \;+\; \frac{c_{a'}-c_a}{f(a')-f(a)-3^{-p}}\cdot\big(x-f(a)-3^{-p}\big)\,.$$

1. Pour $p \in \{1;2;3\}$, donner explicitement G_p, les intervalles ouverts $I(a)$, pour $a \in G_p$, et les intervalles fermés $I_{p;k}$, $k \in \mathbb{N}\cap[0;2^p-1]$.
2. Dessiner dans un même schéma les graphes des fonctions g_1, g_2 et g_3, dans le cas où, pour $r \in \{1;2;3\}$ et $a \in G_r$, $c_a = f(a)$.
3. Dessiner dans un même schéma les graphes des fonctions g_1, g_2 et g_3, dans le cas où, pour $r \in \{1;2;3\}$ et $a \in G_r$, $c_a = f(a) + 3^{-r}$.
4. Dessiner dans un même schéma les graphes des fonctions g_1, g_2 et g_3, dans le cas où, pour $r \in \{1;2;3\}$ et $a \in G_r$, $c_a = f(a) + 2^{-1}3^{-r}$.
5. Vérifier que g est bien définie et à valeurs dans $[0;1]$. Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, g_p est continue, est croissante et que $g_p([0;1]) = [0;1]$.
6. Vérifier que g est croissante, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.
7. Vérifier que g est dérivable sur $\mathcal{O}$ et que sa dérivée y est nulle.
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   a). Montrer que, pour $x \in I_{p;0}$, $0 \le g(x) \le L(I_{p;0})$ et $0 \le g_p(x) \le L(I_{p;0})$.
   b). Montrer que, pour $x \in I_{p;2^p-1}$, $0 \le 1-g(x) \le L(I_{p;2^p-1})$ et $0 \le 1-g_p(x) \le L(I_{p;2^p-1})$.
   c). Soit $k \in \mathbb{N}\cap]0;2^p-1[$ et $x \in I_{p;k}$. On sait que $I_{p;k} = [f(a)+3^{-p}; f(a')]$, pour un $a \in G_r$ et un $r \in \mathbb{N}\cap[1;p]$ et pour un $a' \in G_{r'}$ et un $r' \in \mathbb{N}\cap[1;p]$. Montrer que $c_a \le g(x) \le c_{a'}$ et $c_a \le g_p(x) \le c_{a'}$.
   d). Déduire des questions précédentes que
   $$\sup_{x\in[0;1]} |g(x)-g_p(x)| \;\le\; 3\cdot 3^{-p}\,.$$
9. En déduire que g est continue.