Université de Cergy-Pontoise **2019-2020**
Calcul intégral, S5.

Intégrale de Lebesgue.

Exercice 63. : Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et μ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $0 \leq f \leq g$ et $(f; g) \in \mathcal{M}(\mathcal{T}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))^2$. En utilisant la définition des intégrales, montrer que

$$0 \;\leq\; \int f\, d\mu \;\leq\; \int g\, d\mu \;\leq\; +\infty\,.$$

Exercice 64. : On considère la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $\nu = 5\delta_0$ et μ la mesure de comptage. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2$ si $x \in [-1; 2]$, $f(x) = 3$ si $x \in]3; 4]$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g = 3 \cdot \mathbb{1}_{[-3;0[} + 7 \cdot \mathbb{1}_{[2;4[}$ et $h = 3 \cdot \mathbb{1}_{[-3;0[} + 7 \cdot \mathbb{1}_{[-2;4[}$.

1. Montrer en utilisant la définition que f et g sont étagées et positives.
2. Calculer $\int f\, d\lambda$ et $\int f\, d\nu$.
3. Calculer $\int g\, d\lambda$ de deux manières différentes.
4. Montrer que $h = 3 \cdot \mathbb{1}_{[-3;-2[} + 10 \cdot \mathbb{1}_{[-2;0[} + 7 \cdot \mathbb{1}_{[0;4[}$.
5. Calculer $\int h\, d\lambda$ en utilisant les deux expressions précédentes de h.
6. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ est étagée positive. Calculer $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\, d\lambda$ et $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\, d\mu$.

Exercice 65. : On considère la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 0$ si $|x| > 1$, $f(x) = x + 1$, si $x \in [-1; 0[$, et $f(x) = 1 - x$ si $x \in [0; 1]$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de

$$\int f\, d\lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda \;=\; \int_{\mathbb{R}} f \cdot \mathbb{1}_{[-1;1]}\, d\lambda \;=\; \int_{[-1;1]} f\, d\lambda$$

(qui est 1) en utilisant la définition.

1. Vérifier que f est continue et positive. Elle est donc mesurable.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $k \in [1; n] \cap \mathbb{N}$, on définit

   $$A_k^n \;=\; \left\{x \in \mathbb{R};\, (k-1)n^{-1} \;\leq\; |x| \;<\; kn^{-1}\right\}$$

   et on considère $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

   $$g_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(1 \;-\; \frac{k}{n}\right) \cdot \mathbb{1}_{A_k^n}\,.$$

   Vérifier que g_n est étagée positive et que $g_n \leq f$. Déterminer

   $$a_n \;:=\; \int g_n\, d\lambda\,.$$

3. En remarquant que $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$, montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
4. En déduire, en utilisant uniquement la définition de l'intégrale, que
$$\int f\,d\lambda \;\geq\; 1\,.$$
5. Soit $c \in [0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$b_n \;=\; \int g_n \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R};\, c<|x|\leq 1\}}\,d\lambda\,.$$
Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $(1-c)^2$.
(Indication : on pourra utiliser que $\lim n^{-1}E(nc) = c$.)
6. Soit h une fonction étagée positive non nulle telle que $h \leq f$.
a). Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, des réels $c_1;\cdots;c_p$, deux à deux distincts dans $[0;1[$ et des boréliens $B_1;\cdots;B_p$, deux à deux disjoints, tels que
$$h \;=\; \sum_{j=1}^{p} (1-c_j)\cdot \mathbb{1}_{B_j}$$
et, pour tout $j \in [1;p]\cap\mathbb{N}$, $B_j \subset [-c_j;c_j]$. Vérifier que
$$\int h\,d\lambda \;=\; \sum_{j=1}^{p} \int (1-c_j)\cdot \mathbb{1}_{B_j}\cdot \mathbb{1}_{[-c_j;c_j]}\,d\lambda\,. \tag{21}$$
b). Pour $c_0 \in [0;1[\setminus\mathbb{Q}$, on considère la fonction étagée $h_0 = (1-c_0)\mathbb{1}_{[-c_0;c_0]}$. Vérifier que $h_0 \leq f$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_0 \not\leq g_n$.
c). Soit $j \in [1;p]\cap\mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_j(n) \;=\; \big\{t \in \mathbb{R}\,;\; |t| \leq n^{-1}E(nc_j)\big\} \;\subset\; [-c_j;c_j]\,.$$
Montrer que, pour tout $x \in I_j(n)$, $(1-c_j)\cdot\mathbb{1}_{B_j}(x) \leq g_n(x)$.
d). Soit $c = \max\{c_j; 1 \leq j \leq p\}$ et $\epsilon \in]0;(1-c)^2[$. On choisit n_0 assez grand pour que, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on ait $b_n \geq \epsilon$ et $n^{-1} \leq (2p)^{-1}\epsilon$. Montrer que
$$\int h\,d\lambda \;\leq\; \epsilon + \int g_n\cdot\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R};\,|x|\leq c\}}\,d\lambda \;\;\leq\; \int g_n\,d\lambda\,.$$
(Indication : pour tout j, on pourra écrire $\mathbb{1}_{[-c_j;c_j]} = \mathbb{1}_{I_j(n)} + \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus I_j(n)}\cdot\mathbb{1}_{[-c_j;c_j]}$ dans (21).)
7. En déduire que
$$\int f\,d\lambda \;=\; 1\,.$$

Exercice 66. : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable sur un espace mesurable $(\Omega;\mathcal{T})$. Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que
$$\int f\,d\delta_\omega \;=\; f(\omega)\,.$$
(Indication : on pourra commencer par le cas où f est étagée.)

Exercice 67. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par l'exercice 46,

$$\mu \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$$

est une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\int f \, d\mu \;=\; \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \, .$$

En particulier, f est μ-intégrable si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ converge.

2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = 0$ si $x < 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = f(n)$ si $x \in [n; n+1[$. Vérifier que g est mesurable et que

$$\int g \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu \, .$$

3. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ à la foix μ-intégrable et λ-intégrable. Construire une fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $h = f$ sur $\mathbb{N}$ et

$$\int h \, d\lambda \;=\; +\infty \, .$$

Exercice 68. : Soit ν la mesure cardinal sur $(\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer toutes les fonctions étagées positives qui sont intégrables pour ν. Donner une fonction positive intégrable pour ν qui n'est pas étagée.

Exercice 69. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $-A := \{-x; x \in A\}$ est aussi un borélien. Montrer que $\lambda(-A) = \lambda(A)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ borélienne et paire. Montrer que

$$\int f \, d\lambda \;=\; 2 \int f \cdot \mathbb{1}_{[0;+\infty[} \, d\lambda \;=\; 2 \int f \cdot \mathbb{1}_{]0;+\infty[} \, d\lambda \, .$$

Exercice 70. : Soit μ_1 et μ_2 deux mesures positives sur un espace mesurable $(\Omega; \mathcal{T})$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable pour μ_1 et pour μ_2. Montrer que f est intégrable pour $\mu_1 + \mu_2$ et que

$$\int f \, d(\mu_1 + \mu_2) \;=\; \int f \, d\mu_1 \;+\; \int f \, d\mu_2 \, .$$

Exercice 71. : On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit μ une mesure positive sur une espace mesurable $(\Omega; \mathcal{T})$. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \;=\; \Omega \, .$$

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et positive.

1. Montrer que la suite $(f\mathbb{1}_{E_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
2. Montrer, en utilisant uniquement la définition de l'intégrale, que

$$\lim_{n\to\infty}\int f\mathbb{1}_{E_n}\,d\mu \;=\; \int f\,d\mu\,.$$

Exercice 72. : On munit $\overline{\mathbb{R}^+}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit μ une mesure positive sur une espace mesurable $(\Omega;\mathcal{T})$. Soit $f:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^+}$. Montrer que, pour tout $y>0$, on a

$$y\cdot\mu\big(\{y\le f\}\big)\;\le\;\int f\,d\mu\,.$$

Remarque : on a démontré l'inégalité de Tchebycheff.

Exercice 73. : On considère la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}$ et on note par λ la mesure de Lebesgue. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n=n\mathbb{1}_{[n;+\infty[}$, $g_n=n\mathbb{1}_{[n;n+n^{-1}[}$ et $h_n=2n\mathbb{1}_{]0;n^{-1}[}$.

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle monotone ? Vérifier qu'elle converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
2. Vérifier que les quantités suivantes sont bien définies et comparer-les :

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \quad\text{et}\quad \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda\,.$$

3. Même questions pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Même questions pour la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 74. : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$. On suppose que $f\in\mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que $g\in\mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R});\mathcal{B}(\mathbb{C}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{C})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. On considère les fonctions positives $f_+;f_-:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ données par $f_+=\max(0;f)$ et $f_-=\max(0;-f)$. Vérifier que $f_+=|f|\mathbb{1}_{\{f\ge 0\}}=|f|\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ et $f_-=|f|\mathbb{1}_{\{f\le 0\}}=|f|\mathbb{1}_{\{f<0\}}$. Vérifier que f_+ et f_- sont mesurables.
2. Montrer que $f_++f_-=|f|$. En déduire que $|f|$ est λ-intégrable si et seulement si f_+ et f_- sont λ-intégrables.
3. En notant par $|c|$ le module d'un nombre complexe c, en notant par $\Re c$ (resp. $\Im c$) sa partie réelle (resp. imaginaire), montrer que $|\Re g|\le|g|$, $|\Im g|\le|g|$ et $|g|\le|\Re g|+|\Im g|$. Vérifier que $|\Re g|$ et $|\Im g|$ sont mesurables.
4. Montrer que $|g|$ est λ-intégrable si et seulement si $|\Re g|$ et $|\Im g|$ sont λ-intégrables.

Exercice 75. : Vérifier que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont mesurables pour la tribu de Borel. Déterminer celles qui sont intégrables pour la mesure de Lebesgue. E désigne la partie entière.

$$f_1(x)=x\,,\quad f_2(x)=E(x)\,,\quad f_3(x)=\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}\,,\quad f_4(x)=E(2\sin x)\,,\quad f_5(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}\,,$$

$$\text{pour } x\neq 0\,,\quad f_6(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x^2}\mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,,\quad f_7(x)=\frac{\sin x}{x}\,,$$

$$\text{pour } x \neq 0\,,\quad f_8(x) \;=\; \frac{\operatorname{Arctan} x}{x\ln(1+x^4)}\,,\quad f_9(x) \;=\; \frac{\operatorname{Arctan} x}{x\sqrt{x+\sin x}}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,,$$

$$f_6(0) \;=\; a_6\,,\quad f_7(0) \;=\; a_7\,,\quad f_8(0) \;=\; a_8\,,\quad f_9(0) \;=\; a_9\,,$$

où a_6, a_7, a_8 et a_9 sont des réels,

$$f_{10}(x) \;=\; \frac{x+\sin x}{1+x^2}\,,\quad f_{11}(x) \;=\; \cos x\,,\quad f_{12}(x) \;=\; \frac{\cos x\,\sin x}{1+x^2}\,.$$

Exercice 76. : Soit I un ensemble non vide. On note par $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble non vide des parties finies non vides de I. Soit $\mu : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la mesure du décompte sur I. À toute partie A de I, la mesure μ associe donc le cardinal de A.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ ou bien, de manière équivalente, soit $u : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une application qui, à $i \in I$, associe $u(i) = u_i$. On rappelle que la somme de cette famille est définie par

$$\sum_{i\in I} u_i \;=\; \sup_{J\in\mathcal{F}(I)} \sum_{j\in J} u_j \;\in\; \overline{\mathbb{R}^+}\,.$$

On montre dans cet exercice que cette somme coïncide avec l'intégrale de la fonction u par rapport à la mesure μ du décompte sur I.

1. Pour $J \in \mathcal{F}(I)$, soit $g_J : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la fonction définie par $g_J(i) = u_i$ si $i \in J$ et $g_J(i) = 0$ sinon. Vérifier que g_J est une fonction étagée (relativement aux tribus $\mathcal{P}(I)$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$) vérifiant $g_J \leq u$. Calculer $\int g_J\,d\mu$.
2. En déduire que
$$\sum_{i\in I} u_i \;\leq\; \int u\,d\mu\,.$$
3. Soit $g : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction étagée telle que $g \leq u$. On sait qu'il existe (cf. exercice 58) une famille finie $A_1, \cdots, A_n$ de parties disjointes de I et $0 < a_1 < \cdots < a_n$ tels que
$$g \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} \quad \text{et on pose} \quad A_0 \;=\; I \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\,.$$
Montrer que
$$\int g\,d\mu \;\leq\; \sum_{i\in I} u_i\,.$$
(Indication : on pourra utiliser la sommation par paquets.)
4. En déduire que
$$\int u\,d\mu \;\leq\; \sum_{i\in I} u_i\,.$$

Exercice 77. : Soit X un ensemble non vide et ν la mesure positive du décompte sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X. À toute partie A de X, la mesure ν associe donc le cardinal de A. On remarque que toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est mesurable. Pour une telle fonction f, on note par $\mathcal{V}_f$ l'ensemble des valeurs non nulles prises par f et on considère la famille

$$s_f \ = \ \Big(v \cdot \nu\big(f^{-1}(v)\big)\Big)_{v \in \mathcal{V}_f} ,$$

où, pour $v \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(v) = \{x \in X; f(x) = v\}$ est l'image réciproque par f de l'ensemble $\{v\}$. On note par S_f la somme de la famille s_f de termes positifs.
L'objectif de l'exercice est de montrer l'égalité

$$S_f \ = \ \int_X f \, d\nu \, . \tag{22}$$

On aura ainsi montré que l'intégrale d'une fonction positive par rapport à la mesure du décompte peut être vue comme la somme d'une famille de termes positifs.

1. Montrer que (22) est vraie si f est étagée.
2. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et J un sous-ensemble non vide fini de $\mathcal{V}_f$. Soit $f_J : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f_J(x) = f(x)$ si $f(x) \in J$ et $f_J(x) = 0$ sinon. Vérifier que f_J est étagée, $\mathcal{V}_{f_J} = J$, $f_J \leq f$ et, pour tout $v \in J$, $f_J^{-1}(v) = f^{-1}(v)$.
3. En déduire que, pour $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$,

$$S_f \ \leq \ \int_X f \, d\nu \, . \tag{23}$$

4. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction étagée non nulle telle que $g \leq f$. On sait qu'il existe (cf. exercice 58) une famille finie $A_1, \cdots, A_n$ de parties disjointes de X et $0 < a_1 < \cdots < a_n$ tels que

$$g \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \, .$$

   a). Soit $i \in [1; n] \cap \mathbb{N}$. Montrer que A_i est la réunion disjointe de la famille des éléments $f^{-1}(v) \cap A_i$, indexée par $\mathcal{V}_f^i = \{v \in [a_i; +\infty[; \nu(f^{-1}(v) \cap A_i) > 0\}$.
   b). On suppose qu'il existe $i \in [1; n] \cap \mathbb{N}$ tel que $\nu(A_i) = +\infty$. Montrer par l'absurde que $S_f = +\infty$. (Indication : on pourra remarquer que, si s_f est sommable, $\mathcal{V}_f^i$ est au plus dénombrable.)
   c). On suppose que, pour tout $i \in [1; n] \cap \mathbb{N}$, $\nu(A_i) < +\infty$. Montrer que

$$\nu(A_i) \ = \ \sum_{v \in \mathcal{V}_f^i} \nu\Big(f^{-1}(v) \, \cap \, A_i\Big) \, , \tag{24}$$

   où tous les termes sont finis et $\mathcal{V}_f^i$ est un ensemble fini. En déduire que

$$\int_X g \, d\nu \ \leq \ S_f \, . \tag{25}$$

5. Montrer que

$$S_f \ \geq \ \int_X f \, d\nu \, , \tag{26}$$

   ce qui, en conjonction avec (23), prouve (22).