Systèmes différentiels linéaires.

Exercice 94. : Soit $I =]-\pi/2; \pi/2[$. Soit (E) le système différentiel linéaire d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $Y(t) = (x_1(t); x_2(t))^T$, donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -x_1(t) \tan t \,+\, x_2(t) \,+\, \tan t\,, \\ x_2'(t) & = & x_1(t) \,+\, x_2(t) \tan t \,-\, 1\,. \end{array} \right.$$

1. Montrer que $Z : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $Z(t) = (1; \tan t)^T$, est solution de (E_0).
2. Trouver une solution U de (E_0) de la forme $U(t) = \lambda(t)Z(t) + \mu(t)(0; 1)^T$, de sorte que (U, Z) soit une base de S_0.
3. Résoudre (E). (Indication : on pourra utiliser la méthode de variation des constantes).

Exercice 95. : Résoudre le système différentiel linéaire (E) d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $Y(t) = (x_1(t); x_2(t))^T$, donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -x_1(t) \,+\, 4x_2(t) \,+\, t\,, \\ x_2'(t) & = & x_1(t) \,-\, x_2(t) \,-\, 1\,. \end{array} \right.$$

Exercice 96. : On considère le système différentiel linéaire (E) d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $Y(t) = (x_1(t); x_2(t))^T$, donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -x_2(t) \,+\, t\,, \\ x_2'(t) & = & x_1(t) \,-\, 1\,. \end{array} \right.$$

1. Résoudre le système différentiel linéaire sans second membre (E_0) associé sur $\mathbb{C}$.
2. Résoudre le système différentiel linéaire sans second membre (E_0) associée sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre (E). (Indication : on pourra utiliser la méthode de variation des constantes).

Exercice 97. : Résoudre le système différentiel linéaire (E) d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $Y(t) = (x_1(t); x_2(t))^T$, donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -x_1(t) \,+\, 4x_2(t) \,+\, 2\,, \\ x_2'(t) & = & -x_2(t) \,+\, t\,. \end{array} \right.$$

Exercice 98. : On considère le système différentiel linéaire (E), d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad Y'(t) \;=\; AY(t) + \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

1. Résoudre le système différentiel linéaire sans second membre associée (E_0), qui est donné par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions S du système (E).

Exercice 99. : Résoudre les équations différentielles (C), (D) et (E), d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, données respectivement par

$$y'' = -y \,, \quad y'' = y \quad \text{et} \quad y^{(3)} = y \,.$$

Exercice 100. : Résoudre les équations différentielles (D) et (E), d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, données respectivement par

$$y'' = y + b_1(t) \quad \text{et} \quad y'' = -y + b_2(t) \,,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $b_1(t) = t + e^t$ et $b_2(t) = 1$.

Exercice 101. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle (E), d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$y^{(n)} = 0 \,.$$

Exercice 102. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et S_0 l'ensemble des solutions de l'équation différentielle, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $y''(t) = ty(t)$, pour tout $t \in I$.

1. Vérifier que S_0 est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.
2. Chercher un élément de S_0 sous la forme de la somme d'une série entière en choisissant I de manière appropriée.
3. En déduire S_0 pour le I précédent.

Exercice 103. : On note par I_2 la matrice identité 2×2. Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Pour $(a; b) \in \mathbb{C}^2$, montrer que $\exp(aI_2 + bN) = e^a(I_2 + bN)$. (Indication : on pourra noter que $N^2 = 0$).
2. Soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système différentiel linéaire (E_0), d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donné par $Y' = (\alpha I_2 + \beta N)Y$.

Exercice 104. : On note par I_3 la matrice identité 3×3. Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer N^2 et N^3.
2. Pour $(a; b) \in \mathbb{C}^2$, montrer que $\exp(aI_3 + bN) = e^a(I_3 + bN + (b^2/2)N^2)$.
3. Soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{C}^2$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système différentiel linéaire (E_0), d'inconnue $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donné par $M' = (\alpha I_3 + \beta N)M$.

4. En déduire l'ensemble S_0 des solutions du système différentiel linéaire, d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^3$, donné par $Y' = (\alpha I_3 + \beta N)Y$.

Exercice 105. : Soit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ 2 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) \;=\; \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel linéaire (E), d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donné par $y' = Ay + B$.

Exercice 106. : Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une fonction continue. Soit $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ définie par

$$C(t) \;=\; \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)B(s)\, ds \,.$$

1. Montrer que C est bien définie et de classe C^1.
2. Vérifier que C est une solution particulière du système différentiel linéaire, d'inconnue $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, donné par $M' = AM + B$.

Exercice 107. : Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe C^1. Soit $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ définie par $E(t) = \exp(\alpha(t)B)$.

1. Montrer que E est de classe C^1 et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E'(t) = \alpha'(t)BE(t) = \alpha'(t)E(t)B$.
2. Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Résoudre le système différentiel linéaire, d'inconnue $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, donné par $M' = aBM$.
3. Résoudre le système différentiel linéaire, d'inconnue $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^d$, donnée par $Y' = aBY$, en donnant une base de l'ensemble des solutions.

Exercice 108. : On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer AB, BA, A^2 et B^2. Vérifier que $AB \neq BA$.
2. Montrer que $\exp(A) = I_2 + A$, $\exp(B) = I_2 + B$. Vérifier que $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(B)\exp(A)$.
3. Soit $C = A+B$. Montrer de deux façons différentes que $\exp(C) = \operatorname{ch}(1)I_2 + \operatorname{sh}(1)C$. (Indication : on pourra remarquer que $C^2 = I_2$).
4. Vérifier que $\exp(C) \neq \exp(A)\exp(B)$ et $\exp(C) \neq \exp(B)\exp(A)$.
5. Soit $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la fonction de classe C^∞ définie par $C(t) = A + t^2 B$. Vérifier que, pour $t \neq 0$, $C(t)C'(t) - C'(t)C(t) \neq 0$.

6. Soit N la primitive de C donnée par $N(t) = t(A + (t^2/3)B)$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \exp\big(N(t)\big) \;=\; \mathrm{ch}\big(t^2/\sqrt{3}\big)I_2 \;+\; s(t)A \;+\; \big(t/\sqrt{3}\big)\mathrm{sh}\big(t^2/\sqrt{3}\big)B\,,$$
où s est la somme d'une série entière réelle. (Indication : on pourra remarquer que $N(t)^2$ est un multiple de I_2). En déduire que la dérivée quatrième de $\exp(N)$ en 0 s'écrit cI_2 pour un certain réel $c > 0$.
7. On suppose que l'on a une solution de l'équation $M' = CM$ d'inconnue $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\exp(R)$ avec $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dérivable et $R(0) = 0$. Montrer que la dérivée quatrième de $\exp(R)$ en 0 est $2(AB + 3BA)$.
8. En déduire que $\exp(N)$ n'est pas solution de l'équation $M' = CM$ d'inconnue $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a montré que l'exponentielle d'une primitive de C n'est pas solution de l'équation $M' = CM$ d'inconnue $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 109. : Pour $x \in]-1;1[$, on pose
$$f(x) \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - x}\,.$$
On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) sur $]-1;1[$, d'inconnue $y :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$\forall x \in]-1;1[\,, \quad x\,y'(x) \;=\; y(x) \;+\; f(x) \;-\; x/3\,.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x)$ est bien définie. Vérifier que $f(0) = 1$.
2. Soit $x \in]-1;1[$. Montrer que, pour tout $T \geq 1$,
$$\int_1^T \frac{dt}{t^2 - x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot f_n(T) \quad \text{avec} \quad f_n(T) \;=\; \frac{1}{2n+1}\big(1 \;-\; T^{-2n-1}\big)\,.$$
3. En déduire que, tout $x \in]-1;1[$,
$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}\,.$$
4. Vérifier que le rayon de convergence de la série entière précédente est 1. (En particulier, f est de classe C^∞).
5. Déduire du 3 une série entière s_0 solution de l'équation différentielle (E) sur $]-1;1[$ et vérifiant $s_0'(0) = 0$.
6. Soit z une solution de (E) sur $]-1;1[$. Montrer que $z - s_0$ est solution sur $]-1;1[$ de l'équation (E_0) d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $xy'(x) = y(x)$.
7. Résoudre l'équation (E_0) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
8. En déduire que l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $\{y_k; k \in \mathbb{R}\}$, où $y_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $y_k(x) = kx$.
9. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1;1[$.
10. Montrer que, pour $x \in]-1;1[$,
$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln\Big(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\Big)\,,\ \text{si } x > 0\,,\ \text{et } f(x) \;=\; \frac{\mathrm{Arctan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\,,\ \text{si } x < 0\,.$$