Théorème de Fubini.

Exercice 102. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $\nu = \delta_1$ et $\tilde{\nu} = \delta_1 + 2\delta_3$. Pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on note par $D(a; r]$ le disque fermé de centre a et de rayon r. On considère les fonctions

$$f_1 = \mathbb{1}_{[-2;4]\times[-3:7]} , \quad f_2 = \mathbb{1}_{D(0;2]} , \quad f_3 = \mathbb{1}_{D(0;4]} ,$$

$f_4, f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ données par

$$f_4(x; y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} , \quad f_5(x; y) = \frac{(2y - 5)y}{x^2 + 1}$$

et $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_6(0; y) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $f_6(x; y) = x^{-2}(2y - 5)y$.

1. Soit $\mu = \lambda \otimes \nu$ la mesure produit de λ par ν. Pour tout $j \in [1; 6] \cap \mathbb{N}$, déterminer l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à μ de f_j, lorsque celle-ci est bien définie.
2. Même question avec μ remplacée par la mesure $\tilde{\mu} = \lambda \otimes \tilde{\nu}$, la mesure produit de λ par $\tilde{\nu}$.

Exercice 103. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\lambda_2 := \lambda \otimes \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer explicitement les intégrales suivantes, après avoir montrer leurs existences.

$$\int_{[0;1]^2} xy \, d\lambda_2(x; y) , \quad \int_{[-1;1]^2} xy \, d\lambda_2(x; y) , \quad \int_{[0;1]^2} \frac{y}{x} \, d\lambda_2(x; y) ,$$

$$\int_{[0;+\infty[\times[0;1]} \frac{1}{1 + x^2y^2} \, d\lambda_2(x; y) , \quad \int_{[0;+\infty[\times[0;1]} \frac{1}{1 + x^2y} \, d\lambda_2(x; y) .$$

Exercice 104. : Soit $f_0, f_1, g, h : [0; 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_0(0; 0) = f_1(0; 0) = g(0; 0) = h(0; 0) = 0$ et, pour $(x; y) \neq (0; 0)$, $f_1(x; y) = f_0(y; x)$,

$$f_0(x; y) = \frac{x}{x^2 + y^2} , \quad g(x; y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} , \quad h(x; y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} .$$

1. Montrer que les fonctions f_0, f_1, g, h sont mesurables.
2. Sur $[0; 1]^2 \setminus \{(0; 0)\}$, déterminer explicitement les dérivées partielles premières de f_0 et f_1.

3. Montrer que les intégrales sur $[0;1]$ des applications
$$[0;1] \ni x \mapsto \int_0^1 g(x;y)\,dy \quad \text{et} \quad [0;1] \ni x \mapsto \int_0^1 h(x;y)\,dy$$
sont bien définies et vérifier que
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x;y)\,dy \right) dx \;=\; \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 h(x;y)\,dy \right) dx \;=\; +\infty\,.$$
4. Montrer que les intégrales sur $[0;1]$ des applications
$$[0;1] \ni y \mapsto \int_0^1 g(x;y)\,dx \quad \text{et} \quad [0;1] \ni y \mapsto \int_0^1 h(x;y)\,dx$$
sont bien définies et vérifier que
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x;y)\,dx \right) dy \;=\; -\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 h(x;y)\,dx \right) dy \;=\; +\infty\,.$$
5. Montrer que g n'est pas intégrable.
6. La fonction h est-elle intégrable ?

Exercice 105. : En utilisant l'intégrale sur $(\mathbb{R}^+)^2$, pour la mesure de Lebesgue, de la fonction $g : (\mathbb{R}^+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$g(x;y) \;=\; \frac{1}{(1+x)\cdot(1+xy^2)}\,,$$
montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,dt \;=\; \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Exercice 106. : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\lambda_2 := \lambda \otimes \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive. Soit
$$A \;=\; \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2\,;\; 0 \le y \le f(x) \right\} \quad \text{et} \quad G \;=\; \left\{ (x;y) \in \mathbb{R}^2\,;\; y = f(x) \right\}.$$
1. Montrer que A et G sont des boréliens de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\lambda_2(A)$ et $\lambda_2(G)$.
2. En déduire que, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, relativement à λ,
$$\lambda\Big(\left\{ x \in \mathbb{R}\,;\; y = f(x) \right\} \Big) \;=\; 0\,.$$

Exercice 107. : En utilisant
$$I \;=\; \int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$
retrouver la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 108. : Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une bijection croissante de classe C^2. On a nécessairement $g(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction μ-intégrable. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^+} \big(g \circ f\big)\,d\mu \;=\; \int_{\mathbb{R}^+} \mu\big(\{f \ge t\}\big) \cdot g'(t)\,dt\,.$$
(Indication : on pourra commencer par le cas où g est l'identité sur $\mathbb{R}^+$ et utiliser une intégrale appropriée sur $(\mathbb{R}^+)^2$.)