Université de Cergy-Pontoise **2019-2020**
Calcul intégral, S5.

Espaces $\mathcal{L}^p$.

Exercice 109. : Soit $p \in [1; +\infty]$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ est-elle dans $\mathcal{L}^p([0; 1]; d\lambda)$?
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ est-elle dans $\mathcal{L}^p([1; +\infty[; d\lambda)$?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $g_\alpha :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$, si $x \neq 0$, et par $g_\alpha(0) = 0$. La fonction g_α appartient-elle à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; d\lambda)$?

Exercice 110. : Soit $(\Omega; \mathcal{T}; \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable relativement aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On note par ν la mesure positive de densité f par rapport à μ. Soit $p \in [1; +\infty[$. Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Montrer que $g \in \mathcal{L}^p(\Omega; d\nu)$ si et seulement si $|g|^p f \in \mathcal{L}^1(\Omega; d\mu)$ si et seulement si $g \cdot f^{1/p} \in \mathcal{L}^p(\Omega; d\mu)$.
2. On suppose que $(\Omega; \mathcal{T}; \mu) = (\mathbb{R}; \mathcal{B}(\mathbb{R}); \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f > 0$, λ-p.p. On note ν par $f d\lambda$.
   a). Donner un exemple de fonction f pour lequel il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction g_α de l'exercice 109 appartiennent à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; f d\lambda)$.
   b). Donner un exemple de fonction f pour lequel les fonctions g_α de l'exercice 109 appartiennent toutes à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}; f d\lambda)$.

Exercice 111. : Soit $a > 2e^2$. Pour $x \geq 0$ soit

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \big(|\ln t| + a\big)^x \cdot e^{-2t}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \big(|\ln t| + a\big)^x \cdot e^{-2t}\, dt$$

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x)$ est finie, et que $F(1) > 1$.
2. Montrer en utilisant une intégration par parties que, pour tout $x \geq 0$, l'intégrale
$$\int_0^1 |\ln t|^x \, dt$$
est finie.
3. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $G(x)$ est finie et $G(x) > F(x)$. En particulier, $G(1) > F(1) > 1$.
4. Montrer que F est croissante.
5. Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que, pour tout $x > 0$, $F(x) \leq c\sqrt{F(2x)}$. (Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz.)
6. En déduire que, pour tout $x \geq 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $2^p \ln F(x) \leq \ln F(2^p x)$.
7. Montrer qu'il existe $d > 0$ tel que, pour tout $y > 0$, $G(y) > F(y) \geq e^{dy}$.
8. Montrer qu'il existe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, de réels positifs, tendant vers $+\infty$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $G(x_p) \geq e^{x_p \ln G(1)}$.