DEUG Sciences mentions MASS et MIAS
U.E. 5
MA4 - Méthodologie des mathématiques : Les outils de l'analyse.

Thierry Jecko.

Septembre 2003.

Recueil d'exercices.

1 Continuité.

Exercice 1.1. : Le nombre 0 est-il accessible par $[0;1]$? par $]0;1]$? $]-\infty;-1]\cup]0;1]$? par $]-\infty;-1]\cup[1;2]$? par $\{1/n; n\in\mathbb{N}\}$?

Exercice 1.2. : Soit $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x>0$, associe 1 et, à $x<0$, associe -1. Montrer, en utilisant seulement la définition, que $1=\lim_1 f$ et $-1=\lim_{-1} f$. Démontrer ces résultats d'une autre manière.

Exercice 1.3. : Soit $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x\neq 0$, associe 1. Montrer, en utilisant seulement la définition, que $1=\lim_0 f$. Démontrer ce résultat d'une autre manière.

Exercice 1.4. : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x\in\mathbb{R}$ associe x^n (avec la convention $x^0=1$). On veut montrer, en utilisant seulement la définition, que f_n est continue. Les cas $n=0$ et $n=1$ sont traités en cours.

1. Montrer que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $a^2=\lim_a f_2$.
2. Montrer que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $a^3=\lim_a f_3$.
3. Soit $m\in\mathbb{N}^*$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$x^m - y^m = (x-y)\cdot\sum_{k=0}^{m-1} x^k y^{m-1-k}\,.$$

En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $a\in\mathbb{R}$, $a^n=\lim_a f_n$.

Exercice 1.5. : Soit $\sqrt{\cdot}:[0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction racine carrée, c'est-à-dire la bijection réciproque de la fonction $\mathbb{R}^+\ni x\mapsto x^2$ (on admet l'existence de cette fonction). On montre, en utilisant seulement la définition, que $\sqrt{\cdot}$ est continue.

1. Soit $a>0$. Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est continue en a.
2. En utilisant le fait que $\sqrt{\cdot}$ est croissante, montrer que $\sqrt{\cdot}$ est continue en 0.

Exercice 1.6. : Soit $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x>0$, associe 1 et, à $x<0$, associe -1. Montrer, en utilisant seulement la définition, que $1=\lim_{0^+} f$ et $-1=\lim_{0^-} f$. Démontrer ces résultats d'une autre manière.

Exercice 1.7. : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x\neq 0$, associe 1 et, à 0, associe 0. Montrer, en utilisant seulement la définition, que $1=\lim_{x\to 0, x\neq 0} f$. Démontrer ce résultat d'une autre manière. La fonction f est-elle continue ?

Exercice 1.8. : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\ell\in\mathbb{R}$. Montrer, en utilisant seulement la définition des limites, les équivalences suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to 0^-} f(-x) = \ell\,. \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to 0} f(|x|) = \ell\,. \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to 0} f(x^2) = \ell\,. \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to 0} f(x^3) = \ell\,. \tag{4}$$

Trouver une partie D de $\mathbb{R}$ et une fonction $g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que 0 soit accessible par D, $\lim_{x\to 0} g(x^2)$ existe dans $\mathbb{R}$ mais $\lim_{x\to 0} g(x)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.9. : Montrer, en utilisant seulement la définition, que $+\infty = \lim_{x\to+\infty}(x-1)$, $+\infty = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}$ et $1 = \lim_{x\to+\infty} 1$. Étudier $\lim_{x\to 0}|x|^{-1/2}$ et $\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)$.

Exercice 1.10. : Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\cos x$ n'existe pas. Étudier $\lim_{x\to+\infty}(\cos x+\sin x)$ et $\lim_{x\to+\infty}(\cos^2 x+\sin^2 x)$.

Exercice 1.11. : Pourquoi la proposition

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\Big(-x^3\cdot\ln(2+\cos x)\ +\ x\cdot(1+\exp x)\Big)^2\ =\ -1\right)$$

est-elle fausse ?

Exercice 1.12. : Soit $f :]-1;1[\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x\in]-1;1[$, associe x. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de f. Même question pour la fonction $g :]-1;1[\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x\in[0;1[$, associe x et, à $x\in]-1;0[$, associe -1.

Exercice 1.13. : Soit $f :]-1;1[\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x\in]-1;1[$, associe $|x|$. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de f.

Exercice 1.14. : Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{3x^2+x+1}\ ,\ \lim_{x\to-\infty}7x^3\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ ,\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{x^2}\ +\ \frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 1.15. : Redémontrer les équivalences de l'exercice 1.8 en utilisant les opérations sur les limites.

Exercice 1.16. : Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x\neq 0$, associe $(|x^3|-x)/(x^3-|x|)$. Étudier $\lim_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)$ et $\lim_{x\to 0}f(x)$.

Exercice 1.17. : Étant donné $a\in\mathbb{R}$, on a vu dans le MA2 qu'il existe un unique entier $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n\leq a<n+1$. Par définition, c'est la partie entière de a, notée $E(a)$.

1. Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto E(x)$, $x\mapsto E(x)+E(2-x)$, $x\mapsto E(E(x)-x)$.
2. Étudier la continuité des fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par $x\mapsto x\sin(x\pi)/E(x)$, $x\mapsto x\cos(x\pi)/E(x)$.
3. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=E(x)+x\cdot E(2-x)$. Montrer que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)\ =\ \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)\,.$$

   f est-elle continue en 1 ? Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.18. : Soit $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définies par $f(0)=g(0)=0$ et, pour $x\neq 0$, par $f(x)=\sin(1/x)$ et $g(x)=xf(x)$.

1. Étudier la continuité de f et de g sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. Étudier la continuité de f et de g en 0.

3. Montrer que la fonction $h :]-1;1[\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(x) = f(x)+g(x)+E(x)$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x, cf. exercice 1.17), est continue. Admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 1.19. : On admet le fait que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

Exercice 1.20. : Soit $k \in]0;1[$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(kx) = f(x)$. Montrer que si f est continue en 0, alors elle est constante.
Même question pour $k \in]1;+\infty[$.

Exercice 1.21. : Quelles sont les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = f(x)$?

Exercice 1.22. : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $E = \{x \in [a;b];\ f(x) = 0\}$. Montrer que, si E n'est pas vide, alors $(\sup E) \in E$.

Exercice 1.23. : Soit $t \in]0;+\infty[$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période t, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+t) = f(x)$.

1. Montrer que, si $\lim_{+\infty} f$ existe alors f est constante.
2. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ et $\lim_{x\to+\infty} \cos x$ n'existent pas.

Exercice 1.24. : Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $3x^3 - x^2 + 1 = o(x^5)$. A-t-on, au voisinage de $+\infty$, $16x^4 - 3x^2 + 7 = o(x^4 + x^2 + 1)$? $16x^4 - 3x^2 + 7 = O(x^4 + x^2 + 1)$?
Au voisinage de 0, a-t-on $x^4 \ln x = o(x^3)$? $x^4 \ln x = o(x^4)$? $x^4 \ln x = O(x^4)$?

Exercice 1.25. : Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + px + q$. Montrer que f admet au moins une racine. Y en a-t-il d'autres ?

Exercice 1.26. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Sans utiliser la fonction racine carrée, montrer que $f([-1;1]) = [0;1]$, que $f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$, que $f(]1;2]) =]1;4]$ et que $f(]-1;1]) = [0;1]$.

Exercice 1.27. : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, on ait $f(x) \geq \lambda$.
Montrer par des contre-exemples que la conclusion est fausse si l'on remplace $[a;b]$ par un intervalle ouvert ou non borné, ou bien si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue.

Exercice 1.28. : VRAI ou FAUX ? Toute réponse doit être justifiée.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$.

1. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
2. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

3. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
4. Si $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.
5. Si $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure ou sa borne inférieure.
6. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas alors $1/f$ est bornée.
7. L'image du segment $[a;b]$ par une fonction continue sur $[a;b]$ est un certain segment $[c;d]$ (avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ et $c \leq d$).
8. L'image de l'intervalle $]a;b[$ (avec $a < b$) par une fonction continue sur $]a;b[$ est un certain intervalle $]c;d[$ (avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ et $c < d$).
9. Si l'image par $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $[a;b]$ est un segment, alors f est continue.
10. Si l'image par $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $[a;b]$ n'est pas un segment, alors f n'est pas continue.
11. Si $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est positive et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $[M;+\infty[$.
12. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et croissante alors f est injective.

Exercice 1.29. : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) \neq f(b)$ et soit $(p,q) \in (\mathbb{R}^+)^2$ avec $p + q > 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Exercice 1.30. : Soit $f : [0;2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(2)$. Montrer que l'équation, d'inconnue $y \in [0;1]$, $f(y) = f(y+1)$ a au moins une solution.

Exercice 1.31. : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\lim_a f = \lim_b f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas injective. Qu'en est-il si $\lim_a f = \lim_b f = +\infty$?

Exercice 1.32. : Montrer que toute fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est constante.

Exercice 1.33. : Soit $f :]0;+\infty[\longrightarrow]0;+\infty[$ continue telle que $+\infty = \lim_0 f = \lim_{+\infty} f$. Montrer qu'il existe $a \in]0;+\infty[$ tel que $f(a) = \inf f$.

Exercice 1.34. : Continuité et algèbre.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}(r)$ la proposition

$$\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(rx) = rf(x)\Big) .$$

1. Montrer que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies. Montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En déduire que $\mathcal{P}(-1)$ est vraie.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
3. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{P}(r)$ est vraie.

4. Montrer que, si f est continue, alors $\mathcal{P}(r)$ est vraie, pour tout $r \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = y \cdot f(1)$.
5. Montrer que, si f est continue en un point quelconque $a \in \mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que, si f est majorée sur un intervalle $[a; b]$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$), alors f est continue en 0.

Exercice 1.35. : Continuité et barycentre.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) + (f(0) - f(1)) \cdot x - f(0)$. On va montrer que g est nulle c'est-à-dire que f est une fonction affine.

1. Calculer $g(0)$ et $g(1)$. Montrer que
$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}.$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0; 2^n]\!]$, $g(k/2^n) = 0$.
3. En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) = 0$.
4. Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in [q; q+1]$, $g(x) = 0$. Conclure.

2 Dérivabilité.

Exercice 2.1. : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - a$ si $x \geq 0$ et par $f(x) = -x + b$ si $x < 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. On suppose $a + b \neq 0$. Montrer que f n'est pas continue en 0. Y est-elle dérivable ?
3. f est-elle dérivable en 0 ? A-t-elle des nombres dérivés à droite et à gauche en 0 ?

Exercice 2.2. : En utilisant seulement la définition, montrer que $\sqrt{\cdot}$ (définie dans l'exercice 1.5) est dérivable sur $]0; +\infty[$. Montrer qu'elle ne l'est pas en 0.

Exercice 2.3. : Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ? Si oui, le prolongement est-il dérivables en 0 ? Si oui, la dérivée du prolongement est-elle continue en 0 ?

$$\begin{aligned} g_1(x) &= |x| \quad , \quad g_2(x) = |x^3| \, , \\ g_3(x) &= x \cdot \sin(1/x) \quad , \quad g_4(x) = x^2 \cdot \sin(1/x) \, , \\ g_3(x) &= \frac{\sin^2 x}{x} \quad . \end{aligned}$$

Exercice 2.4. : Étudier la dérivabilité en 0 de $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = |x| \cdot (\sin x)^2 \, .$$

Exercice 2.5. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui ne s'annule pas. Montrer que si la fonction f^2 est dérivable, il en est de même pour f.

Exercice 2.6. : Étude d'un "produit infini".

1. Soit $f : [-1; +1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2) - n \cdot f(0) \, .$$

   En utilisant la définition de la dérivabilité de f en 0, montrer que $\lim u_n = (1/2) f'(0)$.
2. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_n = \prod_{p=1}^{n} \Big(1 + p/n^2\Big) \, .$$

Exercice 2.7. : Pour chaque des fonctions suivantes, donner un intervalle ouvert sur lequel elle est dérivable et expliciter la dérivée sur cet intervalle ouvert.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \quad , \quad f_2(x) = x^2 e^{\cos(x)} \, , \\ f_3(x) &= \mathrm{ch}^3 x - \cos^7 x \quad , \quad f_4(x) = \ln(\mathrm{Argsh}\, x) \, , \\ f_5(x) &= \mathrm{Arccos}(1 + 3/x) \quad , \quad f_6(x) = \mathrm{Argsh}(\sin 3x) \end{aligned}$$

et $f_7(x) = -x^3 - 3x^2 + 7$ si $x \leq 1$, $f_7(x) = 2x - 7 + 8/x$ si $x > 1$.

Exercice 2.8. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacune des fonctions suivantes donnez un intervalle ouvert sur lequel elle est n fois dérivable et déterminer, sur cet intervalle, la dérivée n-ième.

$$\begin{array}{ccccccccccc} f & : & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & g & : &]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1-x}{1+x} & , & & & x & \mapsto & \ln(1+x)\,, \\ h & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & f_n & : & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (\sin x)^2 & , & & & x & \mapsto & x^{n-1}e^{1/x}\,. \end{array}$$

Exercice 2.9. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x - x^2$ si $x < 0$ et par $f(x) = 1 + x + x^2$ si $x \geq 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dérivée ?
2. Montrer que la dérivée seconde de f existe. La déterminer.
3. Montrer que la dérivée troisième de f existe. La déterminer.
4. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) + |x - 1|$. Montrer que g admet une dérivée troisième que l'on déterminera.

Exercice 2.10. : Une autre construction de la fonction exponentielle (cf. DEUG 2).
On va montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite

$$\Big(f_n(x)\Big)_n \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} x^k/k!\right)_n$$

est convergente vers une limite que l'on note $f(x)$. On étudiera la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie, qui n'est autre que la fonction exponentielle.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(|a|^k/k!)_k$ est décroissante à partir d'un certain rang. En déduire qu'elle converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$. En utilisant la sous-suite $(|a|^{k+1}/(k+1)!)_k$, en déduire que $l = 0$.
2. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ et en notant par C un majorant de la suite $(|2x|^k/k!)_k$, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

   $$\Big|f_{n+p}(x) - f_n(x)\Big| \;\leq\; C\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{l=0}^{p-1} 1/2^l \;=\; C\,2^{-n-1}\,\frac{1-1/2^p}{1-1/2} \;\leq\; C\,2^{-n}\,.$$

   En déduire que $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge vers une limite notée $f(x)$. Que vaut $f(0)$?
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer que

   $$f_n(x+y) - f_n(x) - yf_{n-1}(x) \;=\; \sum_{k=2}^{n}\sum_{l=0}^{k-2}\frac{x^l}{l!}\cdot\frac{y^{k-l}}{(k-l)!}\,. \tag{5}$$

   En déduire que

   $$\Big|f_n(x+y) - f_n(x) - yf_{n-1}(x)\Big| \;\leq\; y^2\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=0}^{k-2}\frac{|x|^l}{l!}\cdot\frac{1}{(k-l)!}$$

   et que ce dernier terme est $y^2\Big(f_n(|x|+1) - f_n(|x|) - f_{n-1}(|x|)\Big)$, en utilisant (5) pour (x, y) remplacé par $(|x|, 1)$.

4. Déduire des deux questions précédentes que
$$\Big| f(x+y) - f(x) - yf(x) \Big| \;\leq\; y^2\Big(f(|x|+1) - 2f(|x|) \Big)\,.$$
5. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dérivée ?
6. Montrer que f coïncide avec la fonction exponentielle (vue en cours) en prouvant que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x}f(x)$ est constante égale à 1.

Exercice 2.11. : Recherche d'extrema.

1. Quels sont les extrema locaux d'une fonction constante ? Sont-ils absolus ?
2. Même questions pour $f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$.
3. Même questions pour $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1/x$.
4. Même questions pour $h :]0; 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x + (1/x)$.
5. Soit $a \in]0; +\infty[$. Même questions pour $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $k(x) = 1/(1 + |x|) + 1/(1 + |x - a|)$.

Exercice 2.12. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (|x| - 1)^2$.

1. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à f sur $[-2; 2]$?
2. Trouver tous les $x \in [-2; 2]$ tels que $f'(x)$ est bien défini et vaut 0.
3. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à f sur $[0; 2]$?

Exercice 2.13. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n + px + q$. Montrer que f ne peut avoir plus de trois racines réelles distinctes.

Exercice 2.14. : Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[a; b]$ donne l'existence d'un $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$. Quelle est la valeur de c ? En déduire une propriété géométrique de toute parabole.

Exercice 2.15. : Démontrer les inégalités suivantes.

1. Pour tout $x > 0$, $x > \ln(1 + x) > x/(1 + x)$.
2. Pour tout $x \in]0; 1[$, $\mathrm{Arcsin}\, x < x/\sqrt{1 - x^2}$.
3. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{Arctan}\, x > x/(1 + x^2)$.

Exercice 2.16. : Étude d'une suite.

1. Soit $\alpha > 0$. À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \mapsto x^{-\alpha}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,
$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} \;<\; \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right).$$
2. En déduire que, pour tout $\beta > 1$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie par
$$S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}\,,$$
est convergente. Ce résultat est faux pour $\beta = 1$, comme le montre l'exercice 3.21.

Exercice 2.17. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0;1]$ à $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) \;=\; e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

2. En déduire que $\lim u_n = e$.

Exercice 2.18. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Montrer que, si f est paire, alors f' est impaire. Étudier la réciproque.
2. Montrer que, si f est impaire, alors f' est paire. Étudier la réciproque.
3. Montrer que, si f est périodique de période $t > 0$ (cf. exercice 1.23), alors f' est aussi périodique de période t. Étudier la réciproque.

Exercice 2.19. : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et de dérivée continue, telle que $f'(a) = f'(b)$. Soit $F_a, F_b : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par

$$F_a(x) \;=\; \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a\,, \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad F_b(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b\,, \\ f'(b) & \text{si } x = b\,. \end{cases}$$

1. Montrer que F_a et F_b sont continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$.
2. Montrer que, si $F_a(a) = F_a(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) \;=\; \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\,. \tag{6}$$

3. Dans cette question, on suppose que $F_a(a) \neq F_a(b)$. On pose $h = F_a - F_b$.
   (a) Montrer que $h(a) \neq 0$ et que $h(a) = -h(b)$.
   (b) En déduire qu'il existe $\alpha \in]a;b[$ tel que

$$\frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a} \;=\; \frac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha-b}\,.$$

   (c) En déduire que $F_a(\alpha) = F_a(b)$ et qu'il existe $c \in]\alpha;b[$ tel que (6) soit vraie.
4. Donner une interprétation géométrique de la relation (6).

Exercice 2.20. : Soit $(a,b,c,d) \in]0;+\infty[^4$. Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x - 1}\,, \qquad \lim_{x\mapsto 0} \frac{a^x-b^x}{c^x-d^x},\ c \neq d\,, \qquad \lim_{x\to 1/\sqrt{2}} \frac{(\arcsin x)^2 - \pi^2/16}{2x^2-1}\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{th} x - \tan x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos 2x - \sin x}{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}\,, \qquad \lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}\,.$$

Exercice 2.21. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable. On suppose que f s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a; b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 2.22. : Soit $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $f(-1) = f(1) = 0$.

1. Soit $\alpha \in] - 1; 1[$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme P_α de degré au plus 2 tel que la fonction $g_\alpha := f + P_\alpha$ s'annule en -1, 1 et α (on pourra chercher P_α sous la forme $\lambda(x - 1)(x + 1)$).
   (b) En appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, en déduire qu'il existe un $c \in] - 1; 1[$ tel que $f(\alpha) = f''(c) \cdot (\alpha^2 - 1)/2$.
2. En déduire que
$$\sup_{x \in [-1;1]} \left| f(x) \right| \ \leq\ \frac{1}{2} \cdot \sup_{x \in [-1;1]} \left| f''(x) \right| .$$

Exercice 2.23. : Quels sont les formules de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young à l'ordre 3 des fonctions suivantes :
$$f_1(x) = \exp(x)\ ,\ \ f_2(x) = x^2 + 3x - 1\ ,\ \ f_3(x) = \ln(1 + x)\ ?$$
On justifiera l'existence de telles formules.

Exercice 2.24. : Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$x - \frac{x^2}{2} \ <\ \ln(1 + x) \ <\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} .$$

Exercice 2.25. : Trouver un polynôme de Taylor de la fonction exp qui permet de calculer approximativement les valeurs de cette fonction sur $[-1; 1]$ avec la précision 10^{-3}.

Exercice 2.26. : Utiliser la formule de Taylor pour calculer approximativement :

$\sqrt[3]{30}$	avec la précision 10^{-3} ,	$\sqrt{e}$	avec la précision 10^{-2} ,
$\sin 1$	avec la précision 10^{-2} ,	$\ln(1, 2)$	avec la précision 10^{-3} .

Exercice 2.27. : En utilisant une formule de Taylor-Lagrange pour la fonction ln, étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par
$$S_n \ =\ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} .$$
On comparera le résultat trouvé avec l'exercice 3.21.

Exercice 2.28. : Écrire le polynôme $1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ comme un polynôme $P(X)$ de la variable $X = x + 1$.

Exercice 2.29. : Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = 6(x - \sin x)/x^3$.

1. Étudier la limite de f quand x tend vers 0.
2. Montrer que : $\forall x \neq 0$, $\exists \theta \in]0, 1[$; $f(x) = \cos(\theta x)$.

3. Montrer que, près de 0, la proposition $\mathcal{P}(x)$, donnée par
$$\mathcal{P}(x) \ = \ \Big(\forall x \neq 0,\ \exists! \theta \in]0,1[;\ f(x) = \cos(\theta x)\Big)\ ,$$
est vraie. On peut donc définir près de 0 une fonction $x \mapsto \theta(x)$, où $\theta(x)$ est l'unique θ donné par $\mathcal{P}(x)$. Montrer que $\lim_{x\to 0} \theta(x) = 1/\sqrt{10}$.

Exercice 2.30. : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que φ et φ" sont bornées sur $\mathbb{R}$. Soit
$$M_0 \ = \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad \text{et} \quad M_2 \ = \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi"(x)|\ .$$

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange sur $[x;y]$, montrer que
$$|\varphi'(x)| \ \leq \ 2\frac{M_0}{a} \ + \ \frac{aM_2}{2}\ . \tag{7}$$
2. Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange sur $[x-a;x]$ et une sur $[x;x+a]$, montrer que l'on peut améliorer (7) en
$$|\varphi'(x)| \ \leq \ \frac{M_0}{a} \ + \ \frac{aM_2}{2}\ .$$
3. En déduire que φ' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que
$$M_1 \ := \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| \ \leq \ \sqrt{2M_0M_2}\ .$$

Exercice 2.31. : *(Avril 1995)*
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2^n \sin(\pi/2^n)$.

1. Montrer que $\lim v_n$ existe et vaut π.
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour $\sin x$ en 0 à un ordre convenable, montrer que
$$|\pi - v_n| \ \leq \ \frac{\pi^3}{6\times 4^n}\ .$$
3. En utilisant encore Taylor-Lagrange, montrer que
$$\left|\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6\times 4^n}\right| \ \leq \ \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n}}\ .$$
4. Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = \lambda v_{n+1} + (1-\lambda)v_n$. Choisir λ pour qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|\pi - w_n| \leq K/4^{2n}$ (on donnera une valeur numérique d'un tel K).

3 Applications.

Exercice 3.1. : Justifier l'existence et déterminer la partie régulière des développements limités des fonctions suivantes.

1. $\exp x$ au voisinage de 1, à l'ordre 3,
2. $(1+x)^\alpha$ (pour $\alpha > 0$) au voisinage de 1, à l'ordre 2,
3. $\sin x$ au voisinage de $\pi/4$, à l'ordre 4,
4. $(x^2-1)/(2x+x^2)$ au voisinage de $+\infty$, à l'ordre 2,
5. $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln x$ au voisinage de $+\infty$, à l'ordre 4.

Exercice 3.2. : Justifier l'existence et déterminer la partie régulière des développements limités en 0 des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{rlcrl}
\sin x + \mathrm{ch} x & \text{à l'ordre } 6 & , & \ln(1+x) + \exp x & \text{à l'ordre } 4\,, \\
(1+x)^2 + \mathrm{sh} x & \text{à l'ordre } 5 & , & e^x \sin x & \text{à l'ordre } 4\,, \\
x^2 \cos x & \text{à l'ordre } 6 & , & (1+x)^3/\mathrm{ch} x & \text{à l'ordre } 4\,, \\
(1-\cos x)/(\mathrm{sh} x)^2 & \text{à l'ordre } 4 & , & \sin(\ln(1+x)) & \text{à l'ordre } 4\,, \\
\ln(1+\mathrm{sh} x) & \text{à l'ordre } 4 & , & (1+2x-2x^2)^{1/3} & \text{à l'ordre } 3\,, \\
\sqrt{\mathrm{ch} x} & \text{à l'ordre } 4 & , & (1+x)^{\sin x} & \text{à l'ordre } 4\,.
\end{array}$$

Exercice 3.3. : Il se peut qu'en effectuant des opérations sur des développements limités, on gagne ou on perd en précision comme on va le voir ci-dessous. Tous les développements limités considérés sont en 0.

1. Calculer le DL à l'ordre 4 de $(1-\cos x)\mathrm{ch} x$, en appliquant le cours puis en utilisant le DL de $\cos x$ à l'ordre 4 et celui de $\mathrm{ch} x$ à l'ordre 2.
2. Montrer l'existence et calculer la partie régulière du DL à l'ordre 2 de $\sin x/\mathrm{sh} x$.
3. Calculer le DL à l'ordre 4 de $(1+(\mathrm{ch} x-1)^2)^{-1}$, en appliquant le résultat de composition pour les fonctions $y \mapsto (1+y^2)^{-1}$ et $x \mapsto \mathrm{ch} x - 1$ puis en utilisant les DL à l'ordre 2 de $y \mapsto (1+y^2)^{-1}$ et de $x \mapsto \mathrm{ch} x - 1$.

Exercice 3.4. : Montrer que $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1 - \cos x - (\mathrm{sh} x)^2/2$ est négative près de 0. En déduire que 0 est un maximum local de cette fonction.

Exercice 3.5. : On a vu dans le cours que ln n'admet aucun développement limité en 0. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n \cdot \ln x$. On cherche les éventuels développements limités en 0 des f_n.

1. Montrer que f_1 admet un développement limité en 0 à l'ordre 0.
2. Montrer que f_1 n'admet pas de développement limité en 0 à l'ordre 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. f_1 admet-elle un développement limité en 0 à l'ordre p ?
3. Montrer que f_n admet un développement limité en 0 à tout ordre $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < n$. Qu'en est-il pour $p \geq n$?

Exercice 3.6. :

1. Montrer l'existence et déterminer la partie régulière du développement limité en 0 à l'ordre 3 de
$$\mathbb{R} \ni x \;\mapsto\; y_1(x) \;=\; \frac{-x+2-\sqrt{(x-2)^2+4x^2}}{2}\,,$$
où $y_1(x)$ est une solution de l'équation en y, de paramètre x, $y^2+y(x-2)-x^2=0$.
2. Soit $\delta>0$ et $f:]-\delta;\delta[\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable, valant 1 en 0, telle que, pour tout $x\in]-\delta;\delta[$, $f'(x)=x+f(x)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^4$. Déterminer son développement limité en 0 à l'ordre 4 (qui existe puisqu'elle est $\mathcal{C}^4$).
3. Soit I,J deux intervalles ouverts contenant 0. Soit $f:I\longrightarrow J$ strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $J=f(I)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ et, pour tout $x\in I$, $f'(x)>0$. On sait que f est forcément bijective de I sur J et que f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que le développement limité en 0 à l'ordre 5 de f est donné par $x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)$, pour un certain $(a_3,a_5)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer celui de f^{-1} en fonction de (a_3,a_5). Retrouver, à partir du développement limité en 0 de tangente (vu en cours) et du calcul précédent, le développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction arctangente.

Exercice 3.7. : Quelle sont les parties principales en 0 des fonctions suivantes :
$$\cos x \;-\; \cos(2x)\,, \qquad \ln\!\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \;-\; \sin(2x) \;-\; 2x^3\,, \qquad x^x \;-\; (\sin x)^{\sin x}\ ?$$

Exercice 3.8. : Étudier la limite en 0 des fonctions suivantes.
$$\frac{e^x\sin x - x\cos x}{(\tan x)^2}\quad \text{réponse :}\quad 1\,, \qquad \frac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}\quad \text{réponse :}\quad -1\,,$$
$$\frac{a^x-b^x}{x}\quad \text{réponse :}\quad \ln(a/b)\,, \qquad x^{1/(2\ln x)}\quad \text{réponse :}\quad \sqrt{e}\,,$$
$$\frac{1}{x-\sin x}+\frac{1}{x-\sinh x}\quad \text{réponse :}\quad \pm\infty\,, \qquad \frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{(\sinh x)^2}\quad \text{réponse :}\quad 2/3\,.$$

Exercice 3.9. : Étudier la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.
$$\ln\!\left(\tfrac{x+a}{x+b}\right)\cdot\left(\sin\!\left(\tfrac{x+a}{x^2+b^2}\right)\right)^{-1}\quad \text{réponse :}\quad a-b\,, \qquad \frac{\ln\!\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\!\left(\cosh x\right)}\quad \text{réponse :}\quad 0\,,$$
$$x\cdot(a^{1/x}-1)\quad \text{réponse :}\quad \ln a\,, \qquad \left(\tfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x\quad \text{réponse :}\quad \sqrt{ab}\,.$$

Exercice 3.10. : Trouver $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{1+x^2}\;+\;e^{\cos x}\;+\;b}{x^4}$$
existe dans $\mathbb{R}$. Déterminer sa valeur.

Exercice 3.11. : Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui, à $x\neq0$, associe $2(1-\cos x)/x^2$ et, à 0, associe 1, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.12. : *(Avril 1997)*
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = a$ et, pour tout $x \neq 0$, par $f(x) = (e^x - 1)/x$.

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
   Dans la suite, on prend a ainsi choisi.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle, à l'ordre 2, entre 0 et x.
   (b) En déduire qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ (indépendant de x) et $r(x) \in \mathbb{R}$ tels que
   $$f(x) \;=\; a + bx + \frac{x^2}{6} r(x) \qquad \text{et} \qquad |r(x)| \leq e^{|x|} \,.$$
   En déduire que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. On se propose de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = e^x - 1$ et
   $$\varphi(x) \;=\; u(x) - xu'(x) + \frac{x^2}{2} u''(x) - \frac{x^3}{6} u^{(3)}(x) \,.$$
   (a) Calculer $\varphi'(x)$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $|\varphi(x)| \leq (x^4/6) \cdot e^{|x|}$.
   (b) Pour x non nul, calculer $f''(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$ et de $u^{(3)}(x)$. Montrer que
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f''(x)$$
   existe et déterminer sa valeur. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 3.13. : Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = g(x)/x$. On va montrer que f se prolonge par continuité en 0 en une fonction, notée $\bar{f}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \neq 0$, exprimer $f^{(p)}(x)$ en fonction des dérivées de g.
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. Que vaut $\bar{f}(0)$?
3. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ a une limite finie en 0 que l'on déterminera. En déduire que $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Peut-on appliquer le résultat précédent aux fonctions g suivantes
   $$g(x) \;=\; \sin x \,, \quad g(x) \;=\; \cos x \,, \quad g(x) \;=\; e^x - 1 \,, \quad g(x) \;=\; |x| \;?$$

Exercice 3.14. : *(Mars 1998)*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\sqrt{x})$, si $x \geq 0$, et par $f(-\sqrt{-x})$, si $x < 0$.

1. Vérifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Calculer g' en fonction de f'.
2. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Étudier $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g'(x)$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f''(0)$ pour que g soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.15. : Soit $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $s(x) = 1$, si $x \geq 0$, et par $s(x) = 0$, si $x < 0$. Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = sy$?

Exercice 3.16. : Résolution d'équations différentielles.

1. On considère l'équation différentielle $xy' - 2y + x = 0$.
   (a) Résoudre l'équation sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
   (b) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Si l'on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, le résultat est-il modifié ?
2. Mêmes questions pour l'équation différentielle $xy' - (x+1)y + e^x(x^2+1) = 0$.
3. Mêmes questions pour l'équation différentielle $x^3y' + 2(x^2-1)y = 0$.
4. Mêmes questions pour l'équation différentielle $|x|y' + (x-1)y = x^2$.

Exercice 3.17. : On considère l'équation différentielle $y' \sin x - 3y \cos x - \cos x = 0$.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Résoudre l'équation sur $I_k :=]k\pi; (k+1)\pi[$.
2. Déterminer les solutions de l'équation sur $]0; 2\pi[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 2\pi[$.
3. Déterminer les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Combien de solution y de l'équation vérifie $y(\pi/2) = 0$?

Exercice 3.18. : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$, si $x \leq 0$, par $f(x) = 0$, si $x \in]0; 2[$, et par $f(x) = 2 - 2x$, si $x > 2$, est concave.

Exercice 3.19. : Convexité et extrema locaux.

1. Étudier la convexité de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arcsin}\,(3x - 4x^3)$. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Mêmes questions pour $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
3. Mêmes questions pour $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(\text{Arctan}\,(1 + x^2))$.

Exercice 3.20. : Inégalité de Schwarz.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{i \in [1;n]} \in [a; b]^n$ et $(\lambda_i)_{i \in [1;n]} \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tel que $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$. Montrer que
$$f\Big(\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \;\leq\; \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\,.$$
2. Montrer que le résultat précédent est encore valable si l'hypothèse " $(\lambda_i)_{i \in [1;n]} \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tel que $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$" est remplacée par "$(\lambda_i)_{i \in [1;n]} \in (\mathbb{R}^{+})^n$ tel que $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$".

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{i\in[1;n]} \in \mathbb{R}^n$ et $(b_i)_{i\in[1;n]} \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité de Schwarz
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \;\le\; \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$
On pourra appliquer le résultat précédent pour $f(x) = x^2$, $\lambda_i = b_i^2$, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, et a et b convenables.
Interpréter le résultat pour $n \in [\![1;3]\!]$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{i\in[1;n]} \in \mathbb{R}^n$ et $(b_i)_{i\in[1;n]} \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité de Minkowski
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \;\le\; \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}.$$
On pourra appliquer le 2. à $f(x) = (1+x^2)^{1/2}$, $\lambda_i = b_i^2/(\sum_{j=1}^n b_j^2)$, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, et a et b convenables.
Interpréter le résultat pour $n \in [\![1;3]\!]$.

Exercice 3.21. : Constante d'Euler.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$u_n \;=\; \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \;-\; \ln n\,.$$
On se propose de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge un certain réel $\gamma > 0$, appelé *constante d'Euler* (résultat à comparer avec les exercices 2.16 et 2.27).
Pour ce faire, on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$v_n \;=\; \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \;-\; \ln(1+n)\,.$$

1. Soit $f :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Montrer que f est dérivable.
2. En appliquant le théorème des accroissements finis à f entre $n-1$ et n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \ge v_n$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite γ vérifie $\gamma \in [1-\ln 2; 1]$.

Exercice 3.22. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 \in]-\infty;1[$ et $v_{n+1} = 1 + v_n^2/4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < 2$.
2. En déduire que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bien définie, alors $u_0 < 2$.
3. Montrer que, pour $u_0 \ge 2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Exercice 3.23. : Soit $f : [0;+\infty[\longrightarrow [0,1[$ continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = x_n \cdot f(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite converge et calculer sa limite.
En déduire la limite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$X_n \;=\; \sum_{k=0}^n x_k \cdot \Big(1 - f(x_k)\Big)\,.$$

Exercice 3.24. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ (où E désigne la fonction partie entière introduite dans l'exercice 1.17). Etudier la continuité de f. Tracer son graphe. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.25. : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, et par $a_{n+1} = 2(1/a_n + 1/b_n)^{-1}$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que $a_n < b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Déterminer leur limite commune.

Exercice 3.26. : Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$ et $v_0 = b$, et par $u_{n+1} = (u_n + v_n)/2$ et $v_{n+1} = (u_{n+1} \cdot v_n)^{1/2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On appelle ℓ leur limite commune.
2. Soit $\alpha = \mathrm{Arccos}(a/b)$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_n \;=\; \frac{b \cdot \sin\alpha}{2^n \sin(\alpha/2^n)} \quad \text{et} \quad u_n \;=\; v_n \cdot \cos(\alpha/2^n)\,.$$
   (b) En déduire que $\ell = (b \cdot \sin\alpha)/\alpha$.

Exercice 3.27. : Montrer que $0 < x \mapsto \ln(1 + x)$ est 1-lipschitzienne (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis). Montrer que $1 \leq x \mapsto \ln(1 + x)$ est contractante.

Exercice 3.28. : Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 1 + \ln(\mathrm{ch}\, x)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h'(x)| < 1$. Montrer que h n'a pas de point fixe.

Exercice 3.29. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-x^2)$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $e \in]2; 3[$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que f admet un unique point fixe, noté a.
3. Montrer que
   $$k \;:=\; \sup_{x\in[0;1]} |f'(x)| \;=\; \sqrt{2/e} \;<\; 1\,.$$
4. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Trouver un n tel que x_n soit une approximation de a à 10^{-4} près (on pourra utiliser le fait que $e \geq 2,5$).

Exercice 3.30. : Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 4 - (\ln x)/4$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f a un unique point fixe a. Montrer qu'il existe $k \in [0; 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et vérifie $|u_n - a| \leq k^n \cdot |u_0 - a|$. Donner une valeur approchée de a à 10^{-4} près.

Exercice 3.31. : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x^3 + (1/2)x^2 - 12x + 2$. Montrer que φ a une racine et une seule x_0 dans l'intervalle $]0,1[$. Pour calculer une valeur approchée de x_0, on utilise $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + (1/10)\varphi(x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Trouver $k \in [0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leq k^n$. Trouver un n tel que u_n soit une valeur approchée de x_0 à 10^{-4} près.

Exercice 3.32. : Montrer que les suites récurrentes suivantes sont bien définies et étudier leur convergence.

$$x_0 = \tfrac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ x_{n+1} = \sin x_n \quad ; \quad y_0 = \tfrac{1}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ y_{n+1} = \tfrac{1}{4} + y_n^2\ ;$$

$$z_0 = \tfrac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ z_{n+1} = \tfrac{2+z_n^2}{2\sqrt{2}} \quad ; \quad a_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = 2 - \tfrac{1}{a_n}\ ;$$

$$b_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ b_{n+1} = \tfrac{1}{2}\Big(b_n + \tfrac{1}{b_n}\Big) \quad ; \quad c_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ c_{n+1} = \tfrac{c_n+1}{2c_n+3}\ ;$$

$$d_0 \geq -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ d_{n+1} = \sqrt{1+d_n} \quad .$$

Exercice 3.33. : Montrer que les suites récurrentes suivantes sont bien définies et étudier leur convergence. On étudiera éventuellement des sous-suites convenables.

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ x_{n+1} = \tfrac{2}{1+x_n^2} \quad ; \quad y_0 = \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ y_{n+1} = (1-y_n)^2\ ;$$

$$z_0 = \tfrac{2}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ z_{n+1} = \sqrt{2-z_n} \quad ; \quad a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_{n+1} = \cos a_n\ .$$

Exercice 3.34. : On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine positive r de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

1. On pose $g :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (1+x)^{-1}$.
   (a) Montrer que r est un point fixe de g.
   (b) Soit $J = [1/2;1]$. Montrer que $r \in J$, que $g(J) \subset J$ et que g est contractante sur J.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 \in J$ et par $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et converge vers r.
   (d) Trouver un n tel que u_n soit une valeur approchée de r à 10^{-3} près ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x - 1$. Soit $\Phi :]-1/2;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = x - f(x)/f'(x)$. On se propose de construire une suite récurrente au moyen de la fonction Φ pour approcher r (méthode de Newton).
   (a) Montrer que r est un point fixe de Φ.
   (b) Montrer que Φ est contractante sur $J = [1/2;1]$. A-t-on $\Phi(J) \subset J$?
   (c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 \in J$ et $v_{n+1} = \Phi(v_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et converge vers r.
   (d) Trouver un n tel que v_n soit une valeur approchée de r à 10^{-3} près ?
3. On pose $h(x) = 1 - x^2$.

(a) Montrer que r est un point fixe de h.
(b) La fonction h est-elle contractante sur $J = [1/2; 1]$? Peut-on trouver un intervalle $K \subset J$ tel que $r \in K$ et h est contractante sur K ?
(c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_0 \neq r$ et $w_{n+1} = h(w_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et qu'elle diverge.

Exercice 3.35. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2x - 2$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique r sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2/(x^2 + 2)$.
   (a) Montrer que r est un point fixe de g.
   (b) Trouver un intervalle I tel que $r \in I$, $g(I) \subset I$ et g soit contractante sur I.
   (c) Construire à l'aide de g une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite r.
3. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^3 + 3x - 2$.
   (a) Montrer que r est point fixe de h.
   (b) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_0 \in I \setminus \{r\}$ et $w_{n+1} = h(w_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim w_n = +\infty$.

Exercice 3.36. : *(Avril 1996)*
Soit $g : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - 2 - \ln x$.

1. En considérant $g(3)$ et $g(4)$, montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[3; 4]$ (on citera avec précision les théorèmes utilisés). Dans toute la suite, on appelle ℓ cette solution.
2. Soit $f[1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - g(x) = 2 + \ln x$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq u_n \leq 4$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{|u_0 - \ell|}{4^n} \leq |u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{3^n}$$
(on pourra utiliser le théorème des accroissements finis). En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.
Dans la suite de l'exercice, on applique la méthode de Newton à l'équation $g(x) = 0$, ce qui conduit à considérer la fonction $\Phi :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\Phi(x) = \frac{x(1 + \ln x)}{x - 1}$$
(on ne demande pas de vérifier ceci).
4. Montrer que $\Phi(\ell) = \ell$. Expliciter $\Phi'(x)$, pour $x > 1$, et montrer que $\Phi'(\ell) = 0$. Étudier les variations de Φ.
5. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \Phi(v_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq 4$, et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
6. En écrivant $\Phi''(x)$ sous la forme $A(x)/(x(x - 1)^3))$ et à l'aide de majorations très simples, montrer que, pour tout $x \in [3; 4]$, $|\Phi''(x)| \leq 2$.
7. Soit $v \neq \ell$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, pour la fonction Φ entre ℓ et v. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1} - \ell| \leq |v_n - \ell|^2$.

4 Annales.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS
UE 5 - MA4
Contrôle du 3 avril 1999 - Durée 2 heures
Tous les documents et calculettes sont interdits
Barème indicatif : QC(3 pts), I (4 pts), II (6 pts), III (7 pts)

Question de cours : Donner la définition d'une fonction convexe sur un intervalle I.

Exercice : On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + y = e^x$.
Determiner les solutions de (E) sur $]-\infty; 0[$ ainsi que sur $]0; +\infty[$.
Y a-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice : Soient $a \geq 2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-(x/a)^2)$.
Calculer f' et f''. En déduire la valeur de

$$M \ := \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \, .$$

Montrer que $M \leq 1/2$ (on donne $1,6 \leq \sqrt{e} \leq 1,7$ et $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 0$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq (1/2)^n$. En déduire que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice : *Les deux questions sont indépendantes*

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée. Montrer que f est uniformément continue.
2. On suppose que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $f(1) = \ell$. Soit $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\frac{1}{1-x})$. Justifier la continuité de g sur $[0, 1[$. Comment prolonger g par continuité sur $[0, 1]$? En déduire l'existence d'un c de $]1, +\infty[$ vérifiant $f'(c) = 0$.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS
UE 5 - MA4
Examen du 3 juin 1999 - Durée 2 heures
Tous les documents et calculettes sont interdits
Barème indicatif : QC(4 pts), I (2 pts), II (8 pts), III (6 pts)

Questions de cours : Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition du fait que $f(x) \sim g(x)$ quand x tend vers a.
Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange.

Exercice : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice : Soit α la racine positive du polynôme $f(x) = x^2 - x - 1$. Soient $I = [3/2; 2]$ et $\Phi : I \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par la méthode de Newton. On rappelle que $\Phi(x) = x - f(x)/f'(x)$.
Déterminer Φ' et Φ''.
Calculer $\Phi(\alpha)$ et $\Phi'(\alpha)$.
Montrer que $\Phi(I) \subset I$ et que Φ est contractante sur I.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 = 3/2$ et $v_{n+1} = \Phi(v_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim v_n = \alpha$.
Trouver un indice n tel que $|\alpha - v_n| \leq 10^{-3}$.

Exercice : *Les trois questions sont indépendantes*

Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction f définie par

$$f(x) \;=\; \sin\left(\frac{\pi}{3}\cos x\right) .$$

Soit $g(x) = \sin(x^3)$. Trouver $g^{(2022)}(0)$ (ici, comme dans la question suivante, $g^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de la fonction g).
Soit $h(x) = x^7 \ln(1 + x)$. Trouver $h^{(4119)}(0)$.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du Mercredi 8 septembre 1999 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (4 pts), II (4 pts), III (8 pts)

Questions de cours : Montrer qu'une fonction définie et contractante sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ (pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$).
Énoncer le théorème de Taylor-Young.

Exercice : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) = f'(b) \neq 0$.On suppose par exemple que $f'(a) > 0$.
Montrer que f prend sur $]a; b[$ une valeur strictement positive et une valeur strictement négative (on pourra raisonner par l'absurde et considérer les taux d'accroissements de f en a et en b).
En déduire que f' s'annule en au moins deux points distincts de $]a, b[$.

Exercice : Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de

$$\frac{\ln(1 + e^{2x}) + a\sqrt{1 - 2x} + b}{x^3}$$

soit finie et calculer cette limite.

Exercice : Soit f une fonction positive, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$. On note

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| .$$

Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout $(x,\lambda)\in\mathbb{R}^2$, $f(x)+\lambda f'(x)+M\lambda^2/2\geq 0$.
En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leq(2M\cdot f(x))^{1/2}$.
Soit $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=0$. On pose $g=\sqrt{f}$.
Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$, il existe $c\in\mathbb{R}$, compris entre x_0 et x, tel que $f(x)=(1/2)(x-x_0)^2f''(c)$ (on pourra commencer par remarquer que $f'(x_0)=0$).
En déduire que si $f''(x_0)>0$, g n'est pas dérivable en x_0.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Contrôle du 25 mars 2000 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(6 pts), I (7 pts), II (7 pts)

Questions de cours : Donner la définition d'une fonction uniformément continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue de $[a;b]$ dans $[a;b]$ (pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\leq b$). Montrer qu'il existe $c\in[a;b]$ tel que $f(c)=c$.
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose que, pour tout $x\in[a;b]$, $f''(x)\leq 0$ et que $f(a)=f(b)=0$. Montrer que, pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\geq 0$.

Exercice : Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\lambda e^{-3x}/x-1/x+3x-2$ où λ est une constante réelle.
Déterminer λ pour que f soit prolongeable par continuité en 0.
Montrer que ce prolongement est dérivable en 0 et préciser la valeur de la dérivée en 0.
Montrer que l'équation $xy'+(3x+1)y=9x^2-5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et la préciser. Cette solution est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $F(t)=2f(t)-tf'(t)$.
Montrer que si f est paire alors F l'est aussi.
On suppose à présent F paire et on pose, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $h(t)=(f(t)-f(-t))/t^2$.
Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $h'(t)=0$.
En déduire que f est paire.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du 30 mai 2000 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (7 pts), II (9 pts)

Questions de cours : Soient f et g des fonctions réelles définies sur un voisinage de 0. Que signifie l'expression “f est équivalente à g au voisinage de 0” (que l'on abrège souvent en “$f(x)\sim g(x)$”) ?
Enoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice : *Les deux questions sont indépendantes*

1. Trouver le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$. En déduire celui de $\ln(3 + e^{\sin x})$.
   Calculer $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{4\ln\left(3+e^{\sin x}\right) - 8\ln 2 - x}{\sin(x^2)}$.
2. Trouver les asymptotes pour $x \to \pm\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x^2}$ et déterminer la position relative du graphe par rapport aux asymptotes.

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x^2)/(2+x^2)$.Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $f(\mathbb{R}) = [1/2; 1[$.
Montrer que f est contractante sur $[1/2; 1]$.
En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (quel que soit le réel a).
Soit $\ell = \lim u_n$. Trouver un entier N tel que $|u_N - \ell| < 10^{-3}$. (On ne demande pas de déterminer ℓ.)
Montrer que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du Lundi 11 septembre 2000 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (3 pts), II (6 pts), III (7 pts)

Question de cours : Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercice : Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{\sqrt{1+\sin x} + e^{-x/2} - 2}{x^3} .$$

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x) - f(a))/(x - a)$.
Montrer que g_a est croissante sur $]a, +\infty[$ (on pourra, pour $a < x < y$, écrire x sous la forme $x = ta + (1-t)y$, pour un t convenablement choisi). Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} g_a(x) = 0 .$$

En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ (observer le signe de g_a).
Montrer que $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe (utiliser la définition) et bornée. Qu'en déduit-on pour f ?
Énoncer un résultat résumant cet exercice.

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note

$$M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f^{(k)}(x) \right| .$$

On suppose que M_0 et M_3 sont finis. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.
Ecrire les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de x d'une part pour un accroissement $+h$ et, d'autre part, pour un accroissement $-h$.
Résoudre le système linéaire d'inconnues $f'(x)$ et $f''(x)$ ainsi obtenu et en déduire :

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + h^2\frac{M_3}{6}$$

$$|f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + h\frac{M_3}{3}$$

Montrer que M_1 et M_2 sont finis.
Soient $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $\psi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions données, pour $h > 0$, par $\varphi(h) = M_0/h + h^2M_3/6$ et $\psi(h) = 4M_0/h^2 + hM_3/3$.
Etudier les variations de φ et de ψ.
En déduire l'existence de constantes C_1 et C_2 (que l'on déterminera) telles que

$$M_1 \leq C_1\sqrt[3]{M_0^2 \cdot M_3} \qquad \text{et} \qquad M_2 \leq C_2\sqrt[3]{M_0 \cdot M_3^2}\,.$$

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Contrôle du 24 mars 2001 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(6 pts), I (5 pts), II (9 pts)

Questions de cours : Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle $]b; a[$. Quand dit-on que $-\infty$ est limite à gauche de f en a ?
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et majorée. Montrer que f a une limite en $+\infty$.
Enoncer le théorème de Rolle.

Exercice : Montrer que les fonctions $f : x \mapsto e^{-x}$ et $g : x \mapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
Soit $h : x \mapsto e^{-|x|}$. Vérifier que $h(0) > (1/2)(h(1) + h(-1))$. h est-elle convexe sur $\mathbb{R}$?
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes. On pose $h = f \circ g$.
Peut-on affirmer que h est convexe sur $\mathbb{R}$?
On suppose en outre f croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que h est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré n vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{-|x|}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?
Vérifier que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer de même que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On notera $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq M_1|x - y|$. f est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?
On suppose par exemple $P'(0) < 0$. Montrer qu'il existe un intervalle $]0, h[$ (resp. $]-h, 0[$) sur lequel f est strictement négative (resp. positive). En déduire l'existence de deux points distincts x_1 et x_2 tels que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du Mercredi 30 mai 2001 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (7 pts), II (9 pts)

Questions de cours : Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle $]b; a[$. Quand dit-on que $-\infty$ est limite à gauche de f en a ?
Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice : Trouver le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto 1 + 2x + \cos x$.
Rappeler celui de $t \mapsto \ln(1 + t)$ (en 0, au même ordre).
En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1 + 2x + \cos x)$.
Soit $f : x \mapsto (\ln(1 + 2x + \cos x) - \sqrt{1 + 2x} + a)/x^2$ où a est un réel.
Déterminer le réel a pour que f soit prolongeable par continuité en 0.
Le prolongement ainsi obtenu est-il dérivable en 0 ?

Exercice : On se propose d'approximer le réel r vérifiant $\ln(5 - r) = r$. On rappelle que $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$.
En étudiant rapidement la fonction $f :] - \infty; 5[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(5 - x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r. Montrer que $r \in]1, 2[$. *On citera avec précision les théorèmes utilisés.*
Soit $g :] - \infty; 5[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(5 - x)$.
Montrer que $g([1; 2]) \subset [1; 2]$ et que pour tout $x \in [1; 2]$ on a $|g'(x)| \leq 1/3$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et converge vers r. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r| \leq 3^{-n}$.
On applique à présent la méthode de Newton à f ce qui revient à considérer la fonction $\Phi : [1; 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - f(x)/f'(x)$.
Vérifier que $\Phi'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$ et que $\Phi([1; 2]) \subset [1; 2]$.
Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour Φ à l'ordre 1 au voisinage de r.
Calculer $\Phi''(x)$. A l'aide d'une majoration grossière, trouver $k \in [0; 1[$ tel que $\forall x \in [1; 2]$, $|\Phi''(x)| \leq k$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \Phi(v_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - r| \leq (k/2)^{2^n-1}$.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du 12 septembre 2001 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(6 pts), I (7 pts), II (7 pts)

Questions de cours : Démontrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a au moins une racine réelle.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$. On suppose

que $\forall x \in]a;b[$, $f'(x) \geq 0$. Montrer que f est croissante sur $[a;b]$.
Enoncer la formule de Taylor avec reste de Young.

Exercice : Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de $x = 1$ de la fonction $f : x \mapsto (x^2 \ln x)/(x^2 - 1)$.
On considère l'équation différentielle (E) $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$.
Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$, $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.
Montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Cette solution est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice : Soient $\lambda \in]0.1[$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction polynôme $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k/(k!)$.
On cherche à montrer que l'équation $P_n(x) = \lambda e^x$ admet une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n, et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on considère la fonction $f_n : x \mapsto P_n(x) - \lambda e^x$. Déterminer f_n' et étudier la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Conclure à l'aide d'une démonstration par récurrence.
On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Ecrire la formule de Taylor-Maclaurin (avec reste de Lagrange) pour la fonction exponentielle.
Démontrer alors que la suite $(P_n(x_n) - e^{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Déduire de la question précédente que l'on a : $\lim x_n = +\infty$.

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du Lundi 6 mai 2002 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (10 pts), II (6 pts)

Questions de cours : Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 et admettant un développement limité en 0 à l'ordre 2. Montrer que ce développement est unique. Plus précisément, montrer que s'ils existent $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ et $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$ et des fonctions ϵ et ϕ, définies près de 0, tels que

$$f(h) \; = \; a_0 \, + \, a_1 h \, + \, a_2 h^2 \, + \, h^2 \epsilon(h) \; = \; b_0 \, + \, b_1 h \, + \, b_2 h^2 \, + \, h^2 \phi(h) \, ,$$

avec $\lim_0 \epsilon = \lim_0 \phi = 0$, alors, pour tout $k \in \{0; 1; 2\}$, $a_k = b_k$.
Énoncer le théorème des valeurs intermédaires.

Exercice 1 : Dans tout l'exercice, f désigne la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x/2)$. Les parties A et B suivantes sont largement indépendantes.

Partie A **:** Montrer que f admet sur $[0; 1]$ un unique point fixe ℓ (que l'on ne cherchera pas à expliciter).
Montrer que f est contractante sur $[0; 1]$.

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 \in [0;1]$ et par $u_{n+1} = \cos(u_n/2)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+1} - \ell| \;\le\; (1/2)\cdot|u_n - \ell|\,.$$

Trouver un indice $n \in \mathbb{N}$ permettant d'approcher ℓ à 10^{-3} près.

Partie B : Soit $\Phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ et $I = [2\pi/3; 4\pi/3]$.
Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I. Déterminer Φ' et Φ''. Montrer que, pour tout $x \in I$, $\Phi^{(3)}(x) = -(1 + 2\cos^2(x/2)/(2\sin^4(x/2))$. Donner les valeurs de $\Phi(\pi)$, $\Phi'(\pi)$ et $\Phi''(\pi)$.
Soit $x \in I$. Donner un encadrement de $\cos^2(x/2)$ et de $\sin^4(x/2)$. En déduire que $|\Phi^{(3)}(x)| \le 4/3$.
Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour Φ à l'ordre 2 au voisinage de π.
Montrer que $\Phi(I) \subset I$. On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 \in I$ et par $v_{n+1} = \Phi(v_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'elle est bien définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad |v_{n+1} - \pi| \;\le\; (2/9)\cdot|u_n - \pi|^3\,.$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}\,, x \mapsto \ln(\ln x)$.
Montrer que f est dérivable sur $]1;+\infty[$. Calculer f'.
Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \ge 2$. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[m; m+2]$.
En déduire une majoration de la quantité $\ln(\ln(m+2)) - \ln(\ln m)$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(k\ln(2k))$ diverge vers $+\infty$ (on pourra penser à minorer u_n).

DEUG Sciences 1er niveau - Mentions MASS, MIAS

UE 5 - MA4

Examen du 25 juin 2002 - Durée 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif : QC(4 pts), I (6 pts), II (5 pts), III (5 pts)

Questions de cours :
Soit $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = c$.
Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ k fois dérivables. Montrer que fg est k fois dérivable et que

$$(fg)^{(k)} \;=\; f^{(k)}g + C_k^1 f^{(k-1)}g' + \cdots + C_k^i f^{(k-i)}g^{(i)} + \cdots + fg^{(k)} \text{ (formule de Leibniz)}\,.$$

Exercice 1 : Soit f une fonction réelle de la variable réelle x, définie pour $x(x+1) \ne 0$ par $f(x) = 1 - x - (2x\ln|x|)/(1+x)$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
Donner un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de -1. En déduire que f est prolongeable par continuité en -1, que ce prolongement est dérivable en -1 et la limite, quand x tend vers -1, de $f(x)/(1+x)^2$.

Exercice 2 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. On rappelle que cela signifie l'existence d'un $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a; b]^2\ ,\ |f(x) - f(y)| \ \leq \ |x - y|\ .$$

Montrer que f est continue sur $[a; b]$.
On suppose en outre que f ne s'annule pas sur $[a; b]$. Montrer que la fonction $1/f$ est lipschitziennes sur $[a; b]$.
Monter que cette dernière propriété n'est plus valable si l'on remplace $[a; b]$ par $]a; b]$ (donner un contre-exemple).

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
On note $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. Peut-on affirmer que M_2 est fini ?
On suppose à présent que M_2 est fini. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in [0; +\infty[$.
En écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 au voisinage de x_0, pour un accroissement de $+h$ (c'est-à-dire entre x_0 et x_0+h) puis la même formule pour un accroissement de $-h$ (c'est-à-dire entre $x_0 - h$ et x_0), montrer que

$$\Big|f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)\Big| \ \leq \ h^2 M_2\ .$$

Retrouver l'inégalité précédente en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ , x \mapsto f(x + h) - f(x)$ sur l'intervalle $[x_0 - h; x_0]$, puis le même théorème à f' sur un intervalle judicieux.

DEUG Sciences 1er niveau – Mentions MASS, MIAS

UE5 – MA4

Contrôle du 22 Mars 2003 – Durée : 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Barème indicatif.

Questions de cours (6 pts).
(a) Soit $(a, l) \in \mathbb{R}^2$ et $f :]a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de "l est limite de f en a" et de "l est limite à droite de f en a". Que remarque-t-on ?
(b) Étant donné $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, donner la définition de "f est croissante sur D".
(c) Énoncer le théorème de Rolle.
(d) Redémontrer le résultat suivant. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en 0 alors elle est continue en 0.

Exercice 1 (4 pts). On considère l'équation différentielle

$$2x^2y' + y = 1.$$

(a) Montrer que, sur $]0; +\infty[$ (resp. $] - \infty; 0[$), l'ensemble des solutions est composé des fonctions $0 < x \mapsto 1 + \lambda_+ \exp(1/2x)$ (resp. des fonctions $0 > x \mapsto 1 + \lambda_- \exp(1/2x)$), où λ_+ (resp. λ_-) décrit $\mathbb{R}$.

(b) Soit y_0 une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation. Montrer qu'il existe $(a_+, a_-) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x > 0$, $y_0(x) = 1 + a_+ \exp(1/2x)$ et, pour tout $x < 0$, $y_0(x) = 1 + a_- \exp(1/2x)$. Que vaut $y_0(0)$? En déduire une condition sur le couple (a_+, a_-).
(c) Trouver toutes les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (2,5 pts). Soit $a < c < b$ trois réels et $\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\varphi(a) = \varphi(c) = \varphi(b) = 0$.
(a) Vérifier que $\varphi(x) \leq 0$, quel que soit $x \in [a, b]$.
(b) Montrer que $\varphi(x) = 0$, quel que soit $x \in [a, b]$ (on pourra procéder par l'absurde).

Exercice 3 (3,5 pts).
(a) Montrer que $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \cos(1/x)$ n'existe pas.
(b) Montrer que $\lim_{x\to 0, x\neq 0} x\cos(1/x)$ existe et calculer sa valeur.
(c) Donner une fonction continue en 0 et une fonction non continue en 0 mais définie en 0 tel que le produit soit continu en 0.
(d) Peut-on trouver deux applications qui sont définies mais pas continues en 0, dont le produit est continu en 0 ? (on pourra éventuellement utiliser la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ qui $x > 0$ associe 1 et $x < 0$ associe -1).

Exercice 4 (3 pts). Soit $f : [0, \infty[\to]0, \infty[$ continue, dérivable sur $]0, \infty[$, avec

$$f(0) > 0, \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

(a) Montrer que f est majorée. Soit $M = \sup\{f(x); x > 0\}$.
(b) En déduire que $f(]0, \infty[) =]0; M]$.
(c) Montrer que l'une des propriétés suivantes est vraie :
(la valeur M est atteinte en 0 et seulement en 0),
$(\exists x > 0; f'(x) = 0)$.

DEUG Sciences 1$^{\text{er}}$ niveau – Mentions MASS, MIAS

UE5 – MA4

Examen du 07 Mai 2003 – Durée : 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Le barme est indicatif.

Questions de cours (7 pts).

1. Pour $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, donner la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
2. Énoncer le théorème de Taylor avec reste de Young.
3. Soit $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a - h; a + h[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en a avec $f(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert contenant a sur lequel f ne s'annule pas.
4. Vrai ou faux ? Justifier toute réponse.
   (a) Si une fonction $f :]0; 1[\to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f est bijective.
   (b) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0; 1]$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n. Si f a un point fixe ℓ dans $[0; 1]$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 1 (3 pts). Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^3-1}\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{3^x-1}\,, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x - 1}\right)^2\,, \quad \lim_{x\to +\infty} \left((x+1)^{1/3} - x^{1/3}\right).$$

Exercice 2 (5 pts). On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $2x^3 + x^2 - 1 = 0$.

1. Montrer que cette équation admet une seule solution positive. On la note ℓ.
2. On utilise la méthode de Newton pour construire une suite convergeant vers ℓ. On est amené à considérer une fonction Φ donnée par $\Phi(x) = (4x^3+x^2+1)\cdot(6x^2+2x)^{-1}$ (on ne demande pas de vérifier ceci).
   (a) Montrer que la fonction Φ est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que
   $$\forall x \in]0;+\infty[\,, \quad \Phi'(x) \;=\; \frac{(2x^3+x^2-1)(6x+1)}{2x^2(3x+1)^2}\,.$$
   (b) Montrer que la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 = 1/2$ et $v_{n+1} = \Phi(v_n)$ est bien définie et converge vers ℓ (on pourra vérifier que $\ell \in [1/2;3/4]$).
   (c) Montrer que la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ est quadratique.

Exercice 3 (3 pts). Soit $\delta > 0$ et $f :]-\delta;\delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) \geq 0$ et

$$\forall x \in]-\delta;\delta[\,, \quad \Big(f'(x)\Big)^2 \;=\; 2\,\cos\Big(f(x)\Big)\,.$$

Cette fonction admet un développement limité en 0 à l'ordre 3. Il existe donc trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, sur $]-\delta;\delta[$, $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$.

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto (f'(x))^2$ et $x \mapsto 2\cos(f(x))$ admettent un développement limité en 0 à l'ordre 2. En déduire la valeur de a_1, a_2, a_3.
2. Retrouvez la valeur de a_1, a_2, a_3, en utilisant une formule de Taylor-Young.

Exercice 4 (2 pts).

Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ continue, dérivable sur $]0;1[$, telle que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(f(x)) = f(x)$. Soit $F = \{x \in [0;1]; f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f.

1. Montrer que $F = f([0;1])$. En déduire que F est un segment inclu dans $[0;1]$.
2. Montrer que f est soit constante soit l'application $x \mapsto x$ sur $[0;1]$.

DEUG Sciences 1$^{\text{er}}$ niveau – Mentions MASS, MIAS

UE5 – MA4

Examen du 20 juin 2003 – Durée : 2 heures

Tous les documents et calculettes sont interdits

Le barme est indicatif.

Questions de cours (6 pts).

1. Que signifie, par définition, la phrase : "$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 4" ?

2. Quel est le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$?
3. Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Montrer que, si $f : [\alpha; \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]\alpha; \beta[$, et si $f'(x) \geq 0$ pour $x \in]\alpha; \beta[$, alors f est croissante sur $[\alpha; \beta]$.
4. Vrai ou faux ? Justifier toute réponse. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
   (a) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$ alors f admet un extremum en 0.
   (b) Si f admet une limite finie à droite et à gauche en 0 alors f est continue en 0.

Exercice (5 pts). Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui, à $x \geq 0$ associe $\sqrt{2x}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \sqrt{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
2. En supposant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l, déterminer l.
3. Montrer que, pour $x \geq 1$, $0 \leq f'(x) \leq 1/\sqrt{2}$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq |u_n - 2|/\sqrt{2}$.
4. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Problme (9 pts). On considère la fonction g définie par

$$\begin{array}{ccccl} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-1/x} \quad \text{si } x > 0\,, \\ & & & & 0 \quad \text{si } x \leq 0\,. \end{array}$$

On pourra utiliser sans démonstration que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, que g et sa dérivée g' sont positives, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad g'(x) \geq 0\,,$$

et les deux équivalences

$$\Big(\big(g(x) > 0\big) \iff \big(x > 0\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\big(g'(x) > 0\big) \iff \big(x > 0\big)\Big)\,.$$

On définit deux nouvelles fonctions h_1 et h_2 par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad h_1(x) = g\big(x^2 - 1\big) \quad \text{et} \quad h_2(x) = g\big(4 - x^2\big)\,.$$

1. Étude de h_1 et h_2.
   (a) Montrer que h_1 et h_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier qu'elles sont positives : $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ h_1(x) \geq 0$ et $h_2(x) \geq 0$.
   (c) Établir les deux équivalences suivantes.

$$\big(h_1(x) = 0\big) \iff \big(x \in [-1; 1]\big)\,,$$
$$\big(h_2(x) = 0\big) \iff \big(x \notin]-2; 2[\big)\,.$$

   (d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) + h_2(x) > 0$.

2. Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) \;=\; \frac{h_2(x)}{h_2(x)+h_1(x)}\,.$$

   (a) Vérifier que f est bien définie et est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leq f(x) \leq 1$.

   (c) Montrer l'équivalence

$$\Big(f(x) \;=\; 0\Big) \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(x \notin]-2;2[\Big)\,.$$

   (d) Quelle est l'image réciproque $f^{-1}(1)$ de $\{1\}$ par f ?

   (e) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;-1]$ et strictement décroissante sur $[1;2]$ (on pourra exprimer la dérivée de f en fonction de g et g').

3. Étant donnés $a > b > 0$, donner (sans justification) une fonction F, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]-a;a[$, valant 1 sur $[-b;b]$ et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ 0 \leq F(x) \leq 1$.

5 Quelques exercices corrigés.

Exercice : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f : x \longmapsto \exp(-1/|x|)$, où exp désigne la fonction exponentielle.
Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On note g ce prolongement.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$, à coefficients entiers et dont on précisera le degré, telle que pour tout entier naturel n et tout réel strictement positif x on ait : $g^{(n)}(x) = P_n(1/x)g(x)$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : Comme $|x|$ reste positif près de 0 et $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, on a, par composition, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. On pose donc $g(0) = 0$.

Par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x > 0, g'(x) = (1/x^2)\exp(-1/x)$ et, pour $x < 0, g'(x) = -(1/x^2)\exp(1/x)$

Comme $\lim_{y\to -\infty} y^2 \exp(-y) = 0$, on a, par composition, $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$. Par le cours, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $g'(0) = 0$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: il existe un polynôme P_n, à coefficients entiers et de degré au plus $2n$ tel que

$$\forall x > 0\ ,\ g^{(n)}(x) \ = P_n(1/x)g(x)\ .$$

Comme $g^{(0)}(x) = g(x)$, la propriété est vraie au rang 0, avec $P_0 = 1$.

Supposons le résultat acquis pour un certain rang n. Alors $\forall\, x > 0, g^{(n)}(x) = P_n(1/x)g(x)$. Par dérivation, on obtient $\forall\, x > 0, g^{(n+1)}(x) = -(1/x^2)P_n'(1/x)g(x) + P_n(x)g'(x)$ soit $\forall\, x > 0, g^{(n+1)}(x) = [-(1/x^2)P_n'(1/x) + P_n(x)(1/x^2)]g(x)$, ce qui donne le résultat au rang $n+1$ avec $P_{n+1}(x) = x^2(P_n(x) - P_n'(x))$. Par l'hypothèse de récurrence, il est bien de degré au plus $2n+2 = 2(n+1)$ et à coefficients entiers.

On conclut donc par le principe de récurrence.

Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{y\to -\infty} y^k \exp(-y) = 0$, on a par composition, pour tout entier n, $\lim_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = 0$.

On remarque d'abord que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et paire (resp. impaire) alors f' est impaire (resp. paire). En effet, comme $0 = f(-x) - f(x)$ (resp. $0 = f(-x) + f(x)$), on a, par dérivation, $0 = -f'(-x) - f'(x)$ (resp. $0 = -f'(-x) + f'(x)$).

Comme g est paire, on a par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ a même parité que n. On a donc, par composition,

$$\lim_{x\to 0^-} g^{(n)}(x) \ = \ (-1)^n \cdot \lim_{y\to 0^+} g^{(n)}(y) \ = \ 0\ .$$

Par conséquent $\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$. D'après le cours, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

$\mathbb{R}$ avec, pour tout n, $g^{(n)}(0) = 0$.

Exercice : Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un élément de D_f ou bien une borne d'un intervalle ouvert inclu dans D_f. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \qquad \Big(x \in D_f \cap]a-\delta; a+\delta[\Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\Big). \tag{8}$$
$$\forall \epsilon \in]0;1[, \exists \delta > 0; \qquad \Big(x \in D_f \cap]a-\delta; a+\delta[\Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\Big). \tag{9}$$
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in]0;1[; \qquad \Big(x \in D_f \cap]a-\delta; a+\delta[\Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\Big). \tag{10}$$
$$\forall \epsilon \in]0;1[, \exists \delta \in]0;1[; \qquad \Big(x \in D_f \cap]a-\delta; a+\delta[\Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\Big). \tag{11}$$

Correction : On appelle $\mathcal{P}(\epsilon, \delta)$ l'assertion

$$\Big(x \in D_f \cap]a-\delta; a+\delta[\Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon\Big).$$

Montrons que (8)$\Longleftrightarrow$(9), (8)$\Longleftrightarrow$(10) et (10)$\Longrightarrow$(11)$\Longrightarrow$(9).

(8)$\Longrightarrow$(9) : On suppose (8) vraie. Soit $\epsilon_1 \in]0;1[$. Par (8), il existe un $\delta_1 > 0$ tel que $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_1)$ soit vraie. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon_1 \in]0;1[$, (9) est vraie.

(9)$\Longrightarrow$(8) : On suppose (9) vraie. Soit $\epsilon_1 > 0$. On pose $\epsilon_2 = \min(\epsilon_1, 1/2) \in]0;1[$. En appliquant (9) pour ϵ_2, on trouve un $\delta_2 > 0$ tel que $\mathcal{P}(\epsilon_2, \delta_2)$ soit vraie. Comme $\epsilon_1 \geq \epsilon_2$, $\mathcal{P}(\epsilon_2, \delta_2)$ implique $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_2)$. Donc, $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_2)$ est aussi vraie. On a montré que (8) est vraie.

(8)$\Longrightarrow$(10) : On suppose (8) vraie. Soit $\epsilon_1 > 0$. Par (8), il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_1)$ soit vraie. Soit $\delta_2 = \min(\delta_1, 1/2) \in]0;1[$. Comme $\delta_2 \leq \delta_1$, $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_1)$ implique $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_2)$. Donc, $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_2)$ est aussi vraie. On a montré que (10) est vraie.

(10)$\Longrightarrow$(8) : On suppose (10) vraie. Soit $\epsilon_1 > 0$. Par (10), il existe $\delta_1 \in]0;1[$ tel que $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_1)$ soit vraie. Comme $\delta_1 > 0$, on a montré que (8) est vraie.

(10)$\Longrightarrow$(11) : On suppose (10) vraie. Soit $\epsilon_1 \in]0;1[$. Par (10), il existe $\delta_1 \in]0;1[$ tel que $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_1)$ soit vraie. On a montré que (11) est vraie.

(11)$\Longrightarrow$(9) : On suppose (11) vraie. Soit $\epsilon_1 \in]0;1[$. Par (11), il existe $\delta_1 \in]0;1[$ tel que $\mathcal{P}(\epsilon_1, \delta_1)$ soit vraie. Comme $\delta_1 > 0$, on a montré que (9) est vraie.

Correction du problème de l'examen du 20 juin 2003.

1) Étude de h_1 et h_2.
(a) Les fonctions $x \to x^2 - 1$ et $x \to 4 - x^2$ sont polynômiales donc C^∞ sur $\mathbb{R}$ et comme g est aussi C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, on en déduit que h_1 et h_2, composition de deux fonctions C^∞, sont également C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(b) Comme g est positive, on en déduit que $h_1(x) = g(x^2 - 1) \geq 0, x \in \mathbb{R}$ et de même pour h_2.
(c) Si $x \in [-1, 1]$ alors $x^2 - 1$ est négatif et donc $h_1(x) = g(x^2 - 1) = 0$ car $g(y) = 0$ si $y \leq 0$. Réciproquement si $h_1(x) = 0$ on en déduit que $y = x^2 - 1 \leq 0$ car $g(y) = 0$

si et seulement si y est négatif. Comme $y = x^2 - 1 \leq 0$ on a alors que $x^2 \leq 1$ et donc $x \in [-1, 1]$.
Pour la deuxième équivalence on procède de même en remarquant que $y = 4 - x^2$ est négatif ou nul si et seulement si $x^2 \geq 4$ si et seulement si $x \notin]-2, 2[$.
(d) Si $x \notin]-1, 1[, h_1(x) > 0$ d'après le (b) et le (c) ($h_1(x)$ est positif et différent de 0). Comme $h_2(x) \geq 0$ on a bien $h_1(x) + h_2(x) > 0$. Maintenant si $x \in [-1, 1]$ alors $h_1(x) = 0$ et comme on a aussi $x \in [-2, 2]$ alors $h_2(x) > 0$. Dans les deux cas on a bien $h_1(x) + h_2(x) > 0$.

2) Étude de f.
(a) Comme $h_1(x) + h_2(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est bien définie. De plus, comme $h_1 + h_2$ et h_2 sont C^∞, le quotient des deux est aussi C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(b) Si $x \in \mathbb{R}, h_1(x) \geq 0, h_2(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$. On a aussi $h_1(x) + h_2(x) \geq h_2(x)$ donc $f(x) \leq 1$.
(c) On a $f(x) = 0$ si et seulement si $h_2(x) = 0$ et donc si et seulement si $x \notin]-2, 2[$ d'après la question 1.(c).
(d) Si $x \in f^{-1}(1)$, par définition, $f(x) = 1$ et donc $h_2(x) = h_2(x) + h_1(x)$ et donc $h_1(x) = 0$. D'après la question 1.(c), on en déduit $x \in [-1, 1]$. Réciproquement si $x \in [-1, 1]$ alors $h_1(x) = 0$ et donc $f(x) = 1$. Finalement $f^{-1}(1) = [-1, 1]$.
(e) On remarque d'abord que $h_1'(x) = 2xg'(x^2 - 1)$ et $h_2'(x) = -2xg'(4 - x^2)$. Puis,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h_2'(x)(h_1(x) + h_2(x)) - (h_1'(x) + h_2'(x))h_2(x)}{(h_1(x) + h_2(x))^2} \\ &= \frac{h_2'(x)h_1(x) - h_1'(x)h_2(x)}{(h_1(x) + h_2(x))^2} \\ &= \frac{-2x(g'(4 - x^2)g(x^2 - 1) + g'(x^2 - 1)g(4 - x^2))}{(h_1(x) + h_2(x))^2}, \end{aligned}$$

et donc f' est du signe de $-x$ car g et g' sont positives. Sur $[-2; -1]$, f est donc croissante. Pour $x \in]-2; -1[$, $h_1(x) = g(x^2 - 1) > 0$ et $g'(4 - x^2) > 0$ car $4 - x^2 > 0$. On a alors $g'(4 - x^2)g(x^2 - 1) > 0$ et donc $f'(x) > 0$ si $x \in]-2; -1[$. f est bien strictement croissante sur $[-2; -1]$. Sur $[1; 2]$, on procéde de même. f' est négative et même strictement négative sur $]1; 2[$ car $g(4 - x^2)g'(x^2 - 1) > 0$ si $x \in [1; 2]$.

3) Pour $g_1(x) = g(x^2 - b^2)$ et $g_2(x) = g(a^2 - x^2)$, $F(x) = g_2(x)/(g_1(x) + g_2(x))$ convient.

Exercice : Vrai ou faux ? Justifier toute réponse.

1. Toute fonction f, définie et positive près de zéro (c'est-à-dire sur un certain intervalle $]-\delta; \delta[$), admet une limite positive en zéro.
2. Si $\delta > 0$ et si $f :]-\delta; \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite strictement positive alors f est positive sur $]-\delta; \delta[$.
3. Si la limite de f en $+\infty$ existe alors c'est aussi la limite de la suite $(f(n))_n$.
4. Toute fonction constante est continue sur son domaine de définition.
5. La fonction f a une limite en $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $\delta > 0$, la restriction

f_δ de f à $D_f \cap]a-\delta; a+\delta[$ a une limite en a si, et seulement si, il existe un $\delta > 0$ tel que la restriction f_δ de f à $D_f \cap]a-\delta; a+\delta[$ ait une limite en a.

6. Si $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée, elle admet une limite finie en $+\infty$.

Corrigé :

1. Faux. La fonction $f :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui, $x \in]-1; 1[$, associe 1 si $x \geq 0$ et $1/2$ si $x < 0$ est un contre-exemple. En effet, on a bien, pour tout $x \in]-1; 1[$, $f(x) \geq 0$ mais elle ne peut avoir de limite en 0 puisque ses limites à droite et à gauche en zéro existent et valent respectivement 1 et $1/2$.
2. Faux. Soit $\delta > 0$. La fonction $f :]-\delta; \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui, $x \in]-1; 1[$, associe 1 si $x \geq -\delta/2$ et -1 si $x < -\delta/2$ est un contre-exemple. En effet, cette fonction est constante égale à 1 sur $]-\delta/2; \delta/2[$ donc admet $1 > 0$ pour limite en 0 mais elle n'est pas positive car $f(-3\delta/4) = -1$.
3. Vrai. C'est une partie d'un résultat du cours, puisque la suite $(n)_n$ tend vers $+\infty$.
4. Vrai. C'est démontré dans le cours.
5. Vrai. Notons par (1), (2) et (3) les trois propriétés dans l'ordre d'apparition. On montre (1) $\Longrightarrow$ (2), (2) $\Longrightarrow$ (3) et (3) $\Longrightarrow$ (1).
   En général si $(\forall \delta > 0, \mathcal{P}(\delta))$ est vraie, alors il est clair que $(\exists \delta > 0, \mathcal{P}(\delta))$ est vraie. Pour cette raison, (2) $\Longrightarrow$ (3) est vraie.
   Montrons (1) $\Longrightarrow$ (2) dans le cas où la limite l est finie. Soit $\delta > 0$. Soit $\epsilon > 0$. D'après (1), il existe $\delta_0 > 0$ tel que
   $$f\Big(D_f \cap]a-\delta_0; a+\delta_0[\Big) \subset]l-\epsilon; l+\epsilon[\ .$$
   Comme $D_{f_\delta} \cap]a-\delta_0; a+\delta_0[\subset D_f \cap]a-\delta_0; a+\delta_0[$, on en déduit que
   $$f_\delta\Big(D_{f_\delta} \cap]a-\delta_0; a+\delta_0[\Big) \subset]l-\epsilon; l+\epsilon[\ .$$
   On a donc montré que f_δ admet l pour limite en a.
   Pour traiter les cas "$l = +\infty$" et "$l = -\infty$", reprendre l'argument précédent en remplaçant "Soit $\epsilon > 0$" par "Soit $M > 0$" et "$]l-\epsilon; l+\epsilon[$" par "$]M; +\infty[$" et "$]-\infty; -M[$" respectivement.
   Il reste à montrer (3) $\Longrightarrow$ (1). Par (3), on peut trouver $\delta' > 0$ tel que $f_{\delta'}$ ait une limite en a. On traite le cas où cette limite l est finie. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que
   $$f_{\delta'}\Big(D_{f_{\delta'}} \cap]a-\delta_0; a+\delta_0[\Big) \subset]l-\epsilon; l+\epsilon[\ .$$
   Soit $\delta = \min(\delta_0; \delta')$. Comme $D_f \cap]a-\delta; a+\delta[\subset D_{f_{\delta'}} \cap]a-\delta_0; a+\delta_0[$, on en déduit que
   $$f\Big(D_f \cap]a-\delta; a+\delta[\Big) \subset f_{\delta'}\Big(D_{f_{\delta'}} \cap]a-\delta_0; a+\delta_0[\Big) \subset]l-\epsilon; l+\epsilon[\ .$$
   On a montré que l est la limite de f en a.
   Pour traiter les cas "$l = +\infty$" et "$l = -\infty$", reprendre l'argument précédent en remplaçant "Soit $\epsilon > 0$" par "Soit $M > 0$" et "$]l-\epsilon; l+\epsilon[$" par "$]M; +\infty[$" et "$]-\infty; -M[$" respectivement.

6. Faux. La fonction $f]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui $x>0$ associe $(-1)^{E(x)}$, où $E(x)$ désigne la partie entire de x, est un contre-exemple. En effet, elle est bornée car, pour tout $x>0$, $|f(x)|\leq 1$, et si sa limite en $+\infty$ existait alors les suites $(f(2n))_n$ et $(f(2n+1))_n$ auraient même limite, ce qui est impossible car elles sont constantes égales 1 et -1, respectivement.

Corrigé partiel du contrôle du 22/03/03. Prenons l'énoncé du contrôle et regardons ce qu'on peut faire à peu de frais. Tout d'abord, on doit connaître son cours.

(a) Les définitions demandées (1 point) sont, en notant $D=]a;+\infty[$,

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0;\ \Big(x\in D\cap]a-\delta;a+\delta[\Longrightarrow\ |f(x)-l|<\epsilon\Big)\,,$$
$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0;\ \Big(x\in D\cap]a;a+\delta[\Longrightarrow\ |f(x)-l|<\epsilon\Big)\,.$$

Elles sont <u>équivalentes</u> puisque $D\cap]a-\delta;a+\delta[=D\cap]a;a+\delta[$ (+ 1/2 point).
(b) Il s'agît ici de donner une définition et pas autre chose (1 point). Cette définition est

$$\forall(a,b)\in D^2,\ \Big(a\leq b\ \Longrightarrow\ f(a)\leq f(b)\Big)\,.$$

(c) Voir le cours (2 pts).
(d) Ici, il est bon de se souvenir de la définition de la dérivabilité donné par un développement limité. On en déduit facilement le résultat demandé. Voir le cours (2 pts).

1.(a) On peut se contenter ici de démontrer que, sur $]0;+\infty[$ (resp. $]-\infty;0[$), $x\mapsto\exp(1/(2x))$ est solution de l'équation homogène $y'+y/(2x^2)=0$. Comme la fonction constante égale à 1 est solution sur $]0;+\infty[$ (resp. $]-\infty;0[$) de l'équation complète, l'ensemble des solutions est constitué, d'après le MA1, des fonctions $0<x\mapsto 1+k_+\exp(1/(2x))$, pour k_+ décrivant $\mathbb{R}$ (resp. $0>x\mapsto 1+k_-\exp(1/(2x))$, pour k_- décrivant $\mathbb{R}$). On a récupéré 1,5 points.
1.(b) Comme y_0 est une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, c'est aussi une solution de l'équation sur $]0;+\infty[$. Mais la réponse précédente fournit toutes les solutions de l'équation sur $]0;+\infty[$, donc la restriction de y_0 à $]0;+\infty[$ doit être l'une de ces solutions. Donc il existe $a_+\in\mathbb{R}$ tel que la restriction de y_0 à $]0;+\infty[$ soit $0<x\mapsto 1+a_+\exp(1/(2x))$. Par un raisonnement analogue, on montre qu'il existe $a_-\in\mathbb{R}$ tel que la restriction de y_0 à $]-\infty;0[$ soit $0>x\mapsto 1+a_-\exp(1/(2x))$. On a déjà 1/2 point.
Comme y_0 est une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, y_0 est continue en 0. On a

$$\lim_{x\to 0^+}\exp(1/(2x))\ =\ +\infty\ \text{ et }\ \lim_{x\to 0^-}\exp(1/(2x))\ =\ 0\,,$$

par composition de limites. Comme la limite à droite en 0 de y_0 existe et vaut $y_0(0)$, a_+ est forcément nul. Comme la limite à gauche en 0 de y_0 existe et vaut $y_0(0)$, on a $y_0(0)=1$ et la condition cherchée est donc $a_+=0$ (1 point).

2.(a) Il suffit d'écrire l'hypothèse sur φ pour obtenir la réponse cherchée. En effet, tout $x\in[a;b]$ s'écrit $ta+(1-t)b$ pour un $t\in[0;1]$. Par convexité, $\varphi(x)=\varphi(ta+(1-t)b)\leq t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)=0$, car $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Ceci donne 1 point.

3.(b) Pour $x \neq 0$, on a $|x \cos(1/x)| \leq |x|$ car tout cosinus est compris entre -1 et 1. Comme $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \to 0, x \neq 0} x \cos(1/x)$ existe et vaut 0 (1 point).
3.(c) On peut prendre par exemple $f(x) = x$, pour tout x, et $g(x) = \cos(1/x)$, pour $x \neq 0$, et $g(0) = \pi$. En effet, f est continue en 0, g ne l'est pas d'après la question **3.(a)**, mais fg l'est d'après la question **3.(b)** (1/2 point).
3.(d) Avec l'indication, on peut penser introduire la fonction g qui à $x \geq 0$ associe 1 et à $x < 0$ associe -1. g est discontinue en 0 mais $g^2 : x \mapsto g(x)^2$ est la fonction constante égale à 1, donc est continue (1 point).

Même en ne remarquant rien dans la question de cours **(a)** et en ayant 0 point en **(d)**, on a déjà accumulé 10,5 points.

Dans la question **1.(c)**, on déduit de **1.(b)** que toute solution y sur $\mathbb{R}$ vaut 1 pour $x \geq 0$ et $1 + a_- \exp(1/(2x))$ pour $x < 0$, pour une certaine constante $a_- \in \mathbb{R}$. Il s'agît ensuite de montrer que toutes les fonctions de ce type sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (i.e. qu'elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que l'équation est vérifiée en tout point de $\mathbb{R}$).

Pour la question **2.(b)**, on peut construire un raisonnement par l'absurde en utilisant la définition de la convexité.
La négation du résultat à démontrer est :

$$\exists x \in [a;b];\ \ \varphi(x) \neq 0\ .$$

Supposons que cette proposition soit vraie. Soit $x_0 \in [a;b]$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. D'après **2.(a)**, on a $\varphi(x_0) < 0$. Comme $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = 0$, on a ou bien $x_0 \in]a;c[$ ou bien $x_0 \in]c;b[$. Dans le premier cas, $c \in]x_0, b[$ donc il existe $t \in]0;1[$ tel que $c = tx_0 + (1-t)b$. Par convexité, $0 = \varphi(c) = \varphi(tx_0 + (1-t)b) \leq t\varphi(x_0) + (1-t)\varphi(b) = t\varphi(x_0) < 0$. Contradiction. Dans le second cas, on peut de même écrire $c = tx_0 + (1-t)a$, pour un $t \in]0;1[$. Donc $0 = \varphi(c) = \varphi(tx_0 + (1-t)a) \leq t\varphi(x_0) + (1-t)\varphi(a) = t\varphi(x_0) < 0$. Contradiction.

L'exercice **4** est nettement plus dur. Cependant, on peut facilement montrer en **4.(b)** que $f([0;+\infty[) \subset]0;M]$, en utilisant la définition de M et le fait que $f([0;+\infty[) \subset]0;+\infty[$.

Table des matières