Ex. suppl. d'algèbre 2

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$.
Soit P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x+y+z=0$ dans la base canonique, c'est-à-dire
$$P = \{ u \in \mathbb{R}^3 ;\ u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \text{ et } x+y+z=0 \}.$$
Soit $v \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1;2;1)$ dans $\mathcal{B}$.

1 - Déterminer une base $(\tilde{e}_2 ; \tilde{e}_3)$ de P.

2 - Montrer que $\tilde{\mathcal{B}} = (v ; \tilde{e}_2 ; \tilde{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 - Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans $\tilde{\mathcal{B}}$ est
$$\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}};\tilde{\mathcal{B}}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(f est la projection sur P le long de v
parallèlement à v).

4 - Déterminer la matrice de f dans la base canonique : $\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f)$.

5 - Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans $\tilde{\mathcal{B}}$ est
$$\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}};\tilde{\mathcal{B}}}(g) = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(g est la projection sur $\mathrm{Vect}(v)$ le long de P
parallèlement à P).

6 - Déterminer la matrice de g dans la base canonique : $\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(g)$.

Ex. suppl. algèbre 2. n°2.

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Étant donnée A une partie de $\mathbb{R}$, on pose

$$\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Soit $e_1 = \mathbb{1}_{[0;1[}$ et $e_2 = \mathbb{1}_{[1;2[}$.

1- Montrer que $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ est une famille libre dans $\mathcal{E}$.

2- Soit $E = \text{vect}(e_1; e_2)$ dans $\mathcal{E}$. Par 1, $\mathcal{B}$ est une base de E. Soit L l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $\tilde{\mathcal{B}} = (L(e_1); L(e_2))$ est une base de E.
Déterminer $P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}$.

3- Soit $g = \mathbb{1}_{[-1;1[}$. Montrer que l'application
$M : E \to E$, $f \mapsto fg$ est bien définie, et linéaire.

4- Vérifier que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5- Déterminer $\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}};\tilde{\mathcal{B}}}(M)$.

6- Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ et $f \in E$ tels que : $\mathbb{1}_A f \notin E$.

Ex. suppl. d'algèbre 2, n°3.

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev. des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit

$$E_{11} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \text{ et } E_{22} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

et $\mathcal{B} = (E_{11}; E_{12}; E_{21}; E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (1)$ la base canonique de $\mathbb{R}$.

Soit $A = \begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ et

$$Tr : \begin{array}{l}\mathcal{E} \to \mathbb{R}\\ M = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mapsto a+d\end{array},\quad f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathcal{E}\\ t \mapsto tA\end{array},\quad g : \begin{array}{l}\mathcal{E} \to \mathcal{E}\\ M \mapsto AM\end{array} \text{ et } h : \begin{array}{l}\mathcal{E} \to \mathcal{E}\\ M \mapsto Tr(AM)A\end{array}$$

1 – Soit $\tilde{\mathcal{B}} = (E_{11}+E_{22}; E_{12}; E_{21}; E_{11}-E_{22})$.
Montrer que $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathcal{E}$. Déterminer $P_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}}$.

2 – Déterminer une base de $Tr(\mathcal{E})$, une base de $Ker(Tr)$ et $\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}_0}(Tr)$.

3 – Soit $\mathcal{B}_A = (E_{11}; A; E_{21}; E_{22})$. Vérifier que $\mathcal{B}_A$ est une base de $\mathcal{E}$. Déterminer $P_{\mathcal{B};\mathcal{B}_A}$.

4 – Vérifier que $Ker(f) = \{0\}$. Déterminer une base de $f(\mathcal{E})$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0;\mathcal{B}_A}(f)$.

5 – Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(g)$. Montrer que g est inversible et déterminer sa bijection réciproque notée $g^{<-1>}$.

6 – Vérifier que $h = f \circ Tr \circ g$.

7 – Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(h)$.