Courbes paramétrées, espaces de Banach et calcul différentiel.

Exercice 1. : Soit $a > 0$. On considère la courbe paramétrée $\gamma_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_a(t) \;=\; \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} .$$

1. Étudier les variations des coordonnées de γ_1 et tracer son graphe.
2. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, déterminer une équation de la tangente à la courbe au point $\gamma_1(t)$. Justifier la position locale de la courbe par rapport à sa tangente.
3. Mêmes questions pour γ_a lorsque $a \neq 1$.

Exercice 2. : Soit E un $\mathbb{R}$-evn. Soit I, J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $\gamma : I \longrightarrow E$ une courbe paramétrée de classe C^1. Soit $\theta : J \longrightarrow I$ un C^1-difféomorphisme de J sur I. Montrer que la courbe paramétrée $\gamma \circ \theta$ est de classe C^1 et que son image coïncide avec celle de γ.
Le difféomorphisque θ permet une reparamétrisation de l'image de γ.
Par exemple, la courbe paramétrée $\mu_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu_a(t) \;=\; \begin{pmatrix} a\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} .$$

est une reparamétrisation de l'image de γ_a, la courbe paramétrée de l'exercice 1.

Exercice 3. : Soit $\sigma \in \{-1; 1\}$ et $\gamma_\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée donnée par, pour $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_\sigma(t) = (x_\sigma(t); y_\sigma(t); z_\sigma(t))$ avec

$$x_\sigma(t) \;=\; \cos(\sigma t)\,,\; y_\sigma(t) \;=\; \sin(\sigma t)\,,\; z_\sigma(t) \;=\; \sigma t\,.$$

1. Étudier les variations des coordonnées de γ_σ et tracer son graphe.
2. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, déterminer des équations de la tangente à la courbe γ_σ au point $\gamma_\sigma(t)$.

Remarque : on constate que γ_+ et γ_- ont la même image Γ. Elles sont donc deux paramétrisations différentes de Γ.

Exercice 4. : Soit $\Gamma = \{(x; y) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Montrer que $\Gamma_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = 1 \,\text{et}\, x > 0\}$ est l'image d'une courbe paramétrée γ_1.

2. Montrer que $\Gamma_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = 1 \,\text{et}\, y > 0\}$ est l'image d'une courbe paramétrée γ_2.

3. Comparer ces résultats avec l'application du théorème des fonctions implicites près des points $(1;0)$ et $(0;1)$ pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x;y) = x^2+y^2-1$.

Exercice 5. : Soit $\gamma : \mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par, pour $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (x(t);y(t))$ avec

$$x(t) \;=\; \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}\,, \quad y(t) \;=\; \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t}\,.$$

1. Étudier les variations des coordonnées de γ.

2. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à γ en $t = 0$, c'est-à-dire que

$$\lim_{t\to 0}\,(y(t) \,-\, x(t)) \;=\; 0\,.$$

   Déterminer, pour $|t|$ petit, la position de γ par rapport à l'asymptote.

3. Montrer que, quand $t \to \pm\infty$, $\gamma(t)$ tend vers $(0;0)$. Montrer que la droite d'équation $x = 0$ est "tangente à γ quand $t \to \pm\infty$", c'est-à-dire que $x(t) = o(y(t))$ quand $t \to \pm\infty$. Déterminer la position de la courbe par rapport à la "tangente".

4. Montrer que γ admet une asymptote en $t = -1$ que l'on précisera. Même chose en $t = 1$.

5. Recherche des points doubles de γ : trouver tous les $(u;v) \in (\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\})^2$ tel que $u \neq v$ et $\gamma(u) = \gamma(v)$. Déterminer la valeur de γ correspondante.

6. Tracer le graphe de γ.

Exercice 6. : Soit $\gamma : [0;\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par, pour $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (x(t);y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) &=& \sqrt{\cos(t)}\,, \\ y(t) &=& \sqrt{\sin(t)}\,. \end{cases}$$

1. Étudier les variations des coordonnées de γ et tracer son graphe.

2. Montrer que, pour $t \in]0;\pi/2[$,

$$\gamma(t) \;=\; \gamma(0) \,+\, \sqrt{t}\cdot(0;1) \,+\, o(\sqrt{t})\,,$$

   quand $t \to 0$.

Exercice 7. : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in \mathbb{N}$, $D = [a; +\infty[\cap \mathbb{N}$ et $u = (u_n)_{n \in D}$ une suite d'éléments de E. On suppose que la série numérique

$$\sum_{n \in D} \|u_n\|_E \tag{1}$$

converge. Montrer que la série

$$\sum_{n \in D} u_n \tag{2}$$

de vecteurs de E converge dans E.
Remarque : Lorsque la série numérique (1) converge, on dit que la série (2) est absolument convergente.

Exercice 8. : Soit X un ensemble non vide et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{B}(X; F)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel constitué des applications bornées $f : X \longrightarrow F$. Pour $f \in \mathcal{B}(X; F)$, on pose

$$\|f\|_\infty \ := \ \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F \, .$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X; F)$.
2. Montrer que si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet, alors $(\mathcal{B}(X; F), \|\cdot\|_\infty)$ est aussi complet.
3. Montrer que les deux résultats précédents sont encore valables si l'on prend un espace topologique compact pour X et si l'on remplace $\mathcal{B}(X; F)$ par l'espace $\mathcal{C}(X; F)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans F.

Exercice 9. : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit N une norme sur E. On dit qu'elle est équivalente à $\|\cdot\|_E$ s'il existe $c_2 \geq c_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $c_2\|x\|_E \geq N(x) \geq c_1\|x\|_E$.
Soit U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$.

1. Soit N une norme sur E qui est équivalente à $\|\cdot\|_E$. On suppose que f est continue de $(U, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$. Montrer que f est continue de (U, N) vers $(F, \|\cdot\|_F)$.
2. Soit N' une norme sur F qui est équivalente à $\|\cdot\|_F$. On suppose que f est continue de $(U, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$. Montrer que f est continue de $(U, \|\cdot\|_E)$ vers (F, N').
3. Soit N une norme sur E qui est équivalente à $\|\cdot\|_E$. Soit N' une norme sur F qui est équivalente à $\|\cdot\|_F$. On suppose que f est continue de $(U, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$. Montrer que f est continue de (U, N) vers (F, N').

Remarque : Si E est de dimension finie alors toutes les normes sur E sont deux à deux équivalentes (cf. Exercice 28).

Exercice 10. : Soit $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ et $(F, \|\cdot\|)$ trois espaces vectoriels normés. Pour $j \in \{1; 2\}$, soit A_j une partie de E_j. Soit $f : A_1 \times A_2 \longrightarrow F$.

1. On suppose que, pour tout $x_1 \in A_1$, la fonction $f(x_1; \cdot) : A_2 \ni x_2 \mapsto f(x_1; x_2) \in F$ est continue, et, pour tout $x_2 \in A_2$, la fonction $f(\cdot; x_2) : A_1 \ni x_1 \mapsto f(x_1; x_2) \in F$ est continue. On suppose, de plus, que la continuité de f en x_2 est uniforme par rapport à $x_1 \in A_1$, c'est-à-dire que

$$\forall x_2^0 \in A_2 \, , \, \forall \epsilon > 0 \, , \, \exists \delta > 0 \, ; \, \forall x_2 \in A_2 \, ,$$

$$\|x_2 - x_2^0\|_2 < \delta \implies \sup_{x_1 \in A_1} \left\| f(x_1; x_2) - f(x_1; x_2^0) \right\| < \epsilon \, . \tag{3}$$

Montrer que f est continue des deux variables sur $A_1 \times A_2$.

2. On suppose maintenant que f est continue des deux variables sur $A_1 \times A_2$ et que A_1 est compact. (Cela implique bien sûr que f est séparément continue en les variables x_1 et x_2 sur $A_1 \times A_2$.) Montrer que (3) est vraie.

Exercice 11. : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soit U une application linéaire de E dans E. Montrer dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ les égalités

$$\|U\|_0 := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|U(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|U(x)\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|U(x)\| \, .$$

2. Pour U et V deux applications linéaires de E dans E. Vérifier que

$$\|UV\|_0 \leq \|U\|_0 \cdot \|V\|_0 \, .$$

3. Soit U une application linéaire de E dans E. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

   $\mathcal{P}_0$: U est continue.

   $\mathcal{P}_1$: U est continue en 0.

   $\mathcal{P}_2$: U est bornée sur la boule unité fermée de E.

   $\mathcal{P}_3$: U est bornée sur la sphère unité de E.

   $\mathcal{P}_4$: U est lipschitzienne sur E.

   $\mathcal{P}_5$: U est uniformément continue sur E.

   Lorsque U vérifie une de ces propriétés (et donc toutes), on dit que U est une application linéaire continue sur E. Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}(E)$ l'algèbre sur $\mathbb{K}$ des applications linéaires continues sur E.

4. Montrer que $\| \cdot \|_0$ est une norme sur $\mathcal{L}$.

5. Montrer que si $(E, \| \cdot \|)$ est complet alors $(\mathcal{L}, \| \cdot \|_0)$ l'est aussi.

Remarque : Si E est de dimension finie alors toute application linéaire sur E est continue et E est complet (cf. Exercice 28) donc, par 5, $\mathcal{L}$ est aussi complet.

Exercice 12. : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}(E)$ l'algèbre sur $\mathbb{K}$ des applications linéaires continues sur E. Soit $x_0 \in E$. On considère les applications $f_0 : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E$ et $f : \mathcal{L}(E) \times E \longrightarrow E$ définies par $f_0(A) = A \cdot x_0$ et $f(A; x) = A \cdot x$.

1. Montrer que f_0 est linéaire continue et calculer sa norme.
2. Montrer que f est bilinéaire.
3. Vérifier que
$$\sup\big\{\|f(A;x)\|;\ \|A\|_0 \leq 1\,,\|x\| \leq 1\big\}\ <\ +\infty$$
et calculer cette borne supérieure.

Remarque : de manière similaire à l'exercice 11, on peut montrer qu'une application bilinéaire $B : E \times F \longrightarrow G$ est continue si et seulement si

$$\sup\big\{\|B(x;y)\|_G;\ \|x\|_E \leq 1\,,\|y\|_F \leq 1\big\}\ <\ +\infty$$

Exercice 13. : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des applications linéaires continues sur E (pour la norme $\|\cdot\|$), muni de la norme, pour $U \in \mathcal{L}(E)$,

$$\|U\|_0 \ = \ \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|U(x)\|}{\|x\|} \ = \ \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} \|U(x)\| \ = \ \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|U(x)\|\,.$$

On rappelle que, pour tout U, V dans L, $\|UV\|_0 \leq \|U\|_0 \cdot \|V\|_0$. Il se trouve que $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_0)$ est aussi complet. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ définie par $f_n(U) = (n!)^{-1}U^n$.

1. Soit $R \geq 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur la boule fermée B_R centrée en 0 et de rayon R.
Comme ceci est vrai pour tout $R \geq 0$ et comme $\mathcal{L}$ est complet, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(U)$, pour $U \in \mathcal{L}$, converge dans $\mathcal{L}$ et on note sa somme par $\exp(U)$.
2. Que vaut $\exp(0)$?
3. Soit $A \in \mathcal{L}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}$ définie par $g_n(t) = f_n(tA)$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge normalement sur tout ensemble borné de $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ est l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA)$ et qu'elle est continue.
5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est dérivable. En déduire que l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et que sa dérivée est la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA)A = A\exp(tA)$.

Remarque : Lorsque E est de dimension finie d, il est complet. On peut de plus identifier $\mathcal{L} := \mathcal{L}(E)$ à l'algèbre $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ des matrices carrées $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les résultats de l'exercice s'appliquent donc au cas $\mathcal{L} = \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et A une matrice carrée $d \times d$. Lorsque $d = 1$, on retrouve l'exponentielle réelle lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'exponentielle complexe lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 14. : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soit N une norme sur E. Montrer par l'absurde que N n'est pas différentiable en 0.

2. On suppose que E est de dimension finie et que $\mathcal{B} = (e_1; \cdots ; e_d)$ une base de E. Soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la norme sur E qui, à tout

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

avec $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$, associe

$$N(x) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,.$$

Vérifier que, pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, N est différentiable en a et que la différentielle $DN(a)$ de N au point a est donnée par la formule, pour tout $h \in E$,

$$DN(a) \cdot h \;=\; 2^{-1} N(a)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\overline{a_i} h_i \,+\, a_i \overline{h_i})\,,$$

où $a_1, \cdots, a_n$ sont les coordonnées de a dans $\mathcal{B}$ et $h_1, \cdots, h_n$ celles de h.

Exercice 15. : Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soit $v \in F$, soit U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ définie par, pour $x \in E$, $f(x) = v$. Montrer que f est différentiable sur U et que sa différentielle est l'application nulle de U dans $\mathcal{L}(E; F)$.

2. Soit A une application $\mathbb{R}$-linéaire continue de E dans F. Montrer que A est différentiable en tout point $x_0 \in E$ et que la différentielle de $DA(x_0)$ de A en un point $x_0 \in E$ est l'application A elle-même.

3. Soit $(G, \|\cdot\|'')$ un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et P une application $\mathbb{R}$-bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. On suppose donc que

$$\sup\big\{ \|P(x; y)\|'';\; \|x\| \leq 1\,, \|y\|' \leq 1 \big\} \;<\; +\infty\,.$$

Montrer que P est différentiable et calculer, pour tout $(x_0; y_0) \in E \times F$, la différentielle $DP(x_0; y_0)$ de P en $(x_0; y_0)$.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow E$ une application dérivable. Vérifier que f est différentiable en tout point t_0 de I et exprimer la différentielle $Df(t_0)$ de f au point $t_0 \in I$ en fonction du nombre dérivée $f'(t_0) \in E$ de f en t_0.

5. On suppose que E est un espace de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $a \in E$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une application différentiable en a. Montrer qu'il existe un vecteur $v(a) \in E$ tel que, pour tout $h \in E$, $Df(a).h = \langle v(a), h \rangle$.
   $v(a)$ s'appelle le gradient de f en a (associé au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) et est noté par $\nabla f(a)$.

6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $A : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $z : I \longrightarrow E$ deux fonctions dérivables. Montrer que l'application $\varphi : I \longrightarrow E$ définie par $\varphi(t) = A(t) \cdot z(t)$, pour $t \in I$, est dérivable et que

$$\forall t \in I \, , \quad \varphi'(t) \ = \ A'(t) \cdot z(t) \ + \ A(t) \cdot z'(t) \, .$$

   (Indication : on pourra utiliser 3.)

Exercice 16. : Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, on note par $\tilde{A}$ la co-matrice de A (la matrice des co-facteurs de A). Soit $\mathcal{GL}_d(\mathbb{K})$ le groupe des matrices $d \times d$ inversibles.
On rappelle que $\mathcal{GL}_d(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K}); \det A \neq 0\}$, que $\tilde{A}^T \cdot A = (\det A) I_d$, où T désigne la transposition, $\det A$ désigne le déterminant de A et où I_d est la matrice unité $d \times d$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Montrer que det est différentiable en A et que, pour tout $H \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, $D(\det)(A) \cdot H = \mathrm{Tr}(\tilde{A} H)$.

2. Montrer que $\mathcal{GL}_d(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

3. Montrer que l'application $J : \mathcal{GL}_d(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{GL}_d(\mathbb{K})$ qui à $A \in \mathcal{GL}_d(\mathbb{K})$ associe son inverse A^{-1} est différentiable et que la différentielle $DJ(A)$ de J au point $A \in \mathcal{GL}_d(\mathbb{K})$ est donnée par la formule, pour $H \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$,

$$DJ(A) \cdot H \ = \ -A^{-1} \cdot H \cdot A^{-1} \, .$$

4. Vérifier que det et J sont de classe C^1.

Exercice 17. : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des applications linéaires continues sur E muni de la norme $\| \cdot \|_0$ définie dans l'exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ l'application définie par, pour $A \in \mathcal{L}$, $P_n(A) = A^n$.

1. Montrer que P_1 est de classe C^∞ et déterminer explicitement $D^k P_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que P_2 est différentiable et déterminer explicitement DP_2. Vérifier que DP_2 est continue. Montrer que P_2 est deux fois différentiable et calculer $D^2 P_2$.

3. P_2 est-elle de classe C^∞ ?

4. Soit $n \geq 2$. Montrer que P_n est différentiable sur $\mathcal{L}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que P_n est de classe C^∞.

Exercice 18. : L'objectif de cet exercice est de construire une intégrale (l'intégrale de Cauchy) pour des fonctions continues (par morceaux) sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$.
Lorsque $E = \mathbb{R}$, cette intégrale est identique à l'intégrale de Riemann pour les fonctions considérées.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Soit $\mathcal{B}([a; b]; E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications $f : [a; b] \longrightarrow E$ qui sont bornées. Pour $f \in \mathcal{B}([a; b]; E)$, on pose

$$\|f\|_\infty \ := \ \sup_{x \in [a;b]} \|f(x)\| \, .$$

On sait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}([a; b]; E)$ et que $\mathcal{B}([a; b]; E)$ muni de cette norme est complet.
Une subdivision σ de $[a; b]$ est la donnée d'un entier naturel non nul n et d'une suite de points $\sigma = (\sigma_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n = b$.
Une application $\varphi : [a; b] \longrightarrow E$ est dite en escalier sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision σ de $[a; b]$ telle que, pour tout $i \in [1; n] \cap \mathbb{N}$, la restriction $\varphi_{|]\sigma_{i-1};\sigma_i[}$ de φ à l'intervalle ouvert $]\sigma_{i-1}; \sigma_i[$ est constante.
Pour $\varphi : [a; b] \longrightarrow E$ une fonction en escalier et $\sigma = (\sigma_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a; b]$ telles que, pour tout $i \in [1; n] \cap \mathbb{N}$, la restriction de φ à $]\sigma_{i-1}; \sigma_i[$ est une certaine constante $\varphi_i \in E$, on pose

$$I\big(\sigma; \varphi\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \big(\sigma_i - \sigma_{i-1}\big) \cdot \varphi_i \ \in \ E \, .$$

On note par $\mathcal{E}([a; b]; E)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$ et à valeurs dans E. On a bien sûr $\mathcal{E}([a; b]; E) \subset \mathcal{B}([a; b]; E)$.

1. Montrer que $\mathcal{E}([a; b]; E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a; b]; E)$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a; b]; E)$ et deux subdivisions $\sigma = (\sigma_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\tau = (\tau_i)_{0 \leq i \leq p}$ de $[a; b]$ telles que φ soit constante sur chaque intervalle de σ et chaque intervalle de τ. Montrer que $I(\sigma; \varphi) = I(\tau; \varphi)$.
   En particulier, l'application $\int_a^b : \mathcal{E}([a; b]; E) \longrightarrow E$ qui, à une fonction $\varphi \in \mathcal{E}([a; b]; E)$ associe le vecteur $\int_a^b \varphi := I(\sigma; \varphi) \in E$, où σ est une subdivision de $[a; b]$ sur les intervalles de laquelle φ est constante, est bien définie. On dit que $\int_a^b \varphi$ est l'intégrale sur $[a; b]$ de φ.

3. Montrer que $\int_a^b$ est une application linéaire de $\mathcal{E}([a; b]; E)$ dans E. Vérifier que, pour toute $\varphi \in \mathcal{E}([a; b]; E)$, on a

$$\Big\|\int_a^b \varphi\Big\| \ \leq \ \int_a^b \|\varphi\| \ \leq \ (b-a) \cdot \|\varphi\|_\infty \, , \tag{4}$$

où $\int_a^b \|\varphi\|$ désigne l'intégrale sur $[a;b]$ de la fonction en escalier à valeurs réelle $\|\varphi\| : [a;b] \ni x \mapsto \|\varphi(x)\|$.

4. Comme $\mathcal{E}([a;b];E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a;b];E)$, la restriction de $\|\cdot\|_\infty$ à $\mathcal{E}([a;b];E)$ est bien définie et est une norme sur cet espace. Vérifier que l'application $\int_a^b : (\mathcal{E}([a;b];E), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \|\cdot\|)$ est linéaire continue.

5. Soit $\mathcal{R}([a;b];E)$ la fermeture de $\mathcal{E}([a;b];E)$ pour la topologie définie par $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{B}([a;b];E)$. Montrer que $\int_a^b$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $(\mathcal{R}([a;b];E), \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|)$ et que la formule (4) est encore valable pour $\varphi \in \mathcal{R}([a;b];E)$.
   Cette extension de $\int_a^b$ est l'intégrale sur $[a;b]$ à valeurs dans E des fonctions de $\mathcal{R}([a;b];E)$. Lorsque $a = b$, on décide que $\int_a^b$ est l'application nulle sur $\mathcal{R}([a;b];E) = E^{\{a\}}$. Lorsque $c \in [a;b]$ et $f \in \mathcal{R}([a;b];E)$, on peut vérifier que $f \in \mathcal{R}([a;c];E)$ et $f \in \mathcal{R}([c;b];E)$ et que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Lorsque $b < a$ et $f \in \mathcal{R}([b;a];E)$, on pose $\int_a^b f := -\int_b^a f$. En particulier si $a' \le b'$, $f \in \mathcal{R}([a';b'];E)$ et $(a;b;c) \in [a';b']^3$, alors on a encore $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. De plus, on a
$$\Big\|\int_a^b f\Big\| \;\le\; \Big|\int_a^b \|f\|\,\Big| \;\le\; |a-b| \cdot \|f\|_\infty\,. \tag{5}$$

6. Soit $f : [a;b] \longrightarrow E$ une fonction continue. En particulier, on sait que $f \in \mathcal{B}([a;b];E)$ (cf. Exercice 28). En utilisant le fait que f est uniformément continue sur le compact $[a;b]$ (cf. Exercice 27), montrer que $f \in \mathcal{R}([a;b];E)$.

7. Soit $f \in \mathcal{R}([a;b];E)$, $c \in [a;b]$ et $P_f : [a;b] \longrightarrow E$ définie par
$$P_f(x) \;=\; \int_c^x f\,.$$
   Montrer que P_f est bien définie. Vérifier que, pour $(x;y) \in [a;b]^2$,
$$P_f(x) \;-\; P_f(y) \;=\; \int_y^x f\,. \tag{6}$$
   En déduire que P_f est lipschitzienne.

8. On suppose de plus que f est continue en un point $d \in [a;b]$. Montrer que P_f est dérivable en d et que $P_f'(d) = f(d)$.
   En particulier, si f est continue partout, P_f est partout dérivable de dérivée f donc P_f est de classe C^1.

9. Soit $g : [a;b] \longrightarrow E$ est C^1. Montrer que, pour $(x;y) \in [a;b]^2$,
$$g(x) \;-\; g(y) \;=\; \int_y^x g'\,. \tag{7}$$

10. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{R}([a;b];E)$ qui converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers une fonction f. Vérifier que $f \in \mathcal{R}([a;b];E)$ et que, dans E,
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \ = \ \int_a^b f \, .$$

Remarques :
On peut montrer que $\mathcal{R}([a;b];E)$ est constitué des fonctions qui en tout point de $[a;b]$ admettent une limite à gauche (dans E) et une limite à droite (dans E). On appelle ces fonctions les fonctions réglées sur $[a;b]$ à valeurs dans E. En particulier, les fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$ à valeurs dans E sont réglées.
Si, dans le 9, la fonction g est continue et C^1 par morceaux, on peut montrer que le résultat est encore valable.

Exercice 19. : Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(E', \|\cdot\|')$ deux $\mathbb{K}$-espace de Banach. Soit V un ouvert de E et $F : U \longrightarrow E'$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $x_0 \in V$ et $r_0 > 0$ (on note par $\mathcal{B}(x_0;r_0]$ la boule fermée de centre x_0 et rayon r) tels que
$$S \ := \ \sup_{x\in\mathcal{B}(x_0;r_0]} \|DF(x)\|_0 \ < \ \infty \, .$$
Montrer que F est S-lipschitzienne sur $\mathcal{B}(x_0;r_0]$.
(Indication : pour $(x;x') \in \mathcal{B}(x_0;r_0]^2$, on pourra utiliser la fonction $f : [0;1] \longrightarrow E'$ définie par $f(t) = F(tx + (1-t)x')$.)
Remarque : si E est de dimension finie, la finitude de S se déduit de la continuité de DF. Mais en dimension infinie, cet argument est incorrect.

Exercice 20. : Soit F un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On utilisera l'intégrale définie dans l'exercice 18.

1. Soit $v \in F$ et $f : [0;1] \longrightarrow F$ la fonction constante égale à v. Montrer que
$$\int_0^1 f(t)\,dt \ = \ v \, .$$

2. Soit $v \in F$ et $\alpha : [0;1] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Montrer que
$$\int_0^1 \alpha(t) v\,dt \ = \ \Big(\int_0^1 \alpha(t)\,dt\Big) \cdot v \, .$$

3. On suppose que F est de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [0;1] \longrightarrow F$. Soit $\mathcal{B} = (e_1;\cdots;e_d)$ une base de F. Pour $k \in [1;d] \cap \mathbb{N}$, soit $f_k : [0;1] \longrightarrow F$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_1(x);\cdots;f_d(x))$ soit les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.

   a). Montrer que f est continue si et seulement si, pour tout $k \in [1;d] \cap \mathbb{N}$, f_k est continue.

b). On suppose que f est continue. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\,dt \;=\; \sum_{k=1}^{d} \Big(\int_0^1 f_k(t)\,dt\Big)\cdot e_k\,.$$

4. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$f(t) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & t \\ e^t & te^t \end{pmatrix}.$$

Vérifier que f est continue et montrer que

$$\int_0^1 f(t)\,dt \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ e-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Indication : on pourra utiliser le 3 et la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.)

Exercice 21. : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$. Soit $a \in E$. On dit que f vérifie le critère de Cauchy au voisinage de (près de) a si

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ \forall (x;y) \in U^2\,,$$

$$\big(|x-a| < \delta \,\text{et}\, |y-a| < \delta\big) \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon\,.$$

1. On suppoque que $\ell = \lim_a f$ existe dans F. Montrer que f vérifie le critère de Cauchy près de a.

2. Montrer que $\ell = \lim_a f$ existe dans F si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

3. On suppose que f vérifie le critère de Cauchy près de a et que F est complet. Montrer que $\lim_a f$ existe dans F.

Remarques :
Lorsque F est complet, on a donc $\lim_a f$ existe dans F si et seulement si f vérifie le critère de Cauchy près de a.
Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que f vérifie le critère de Cauchy près de $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists A > 0\,;\ \forall (x;y) \in U^2\,,$$

$$\big(x > A \,\text{et}\, y > A\big) \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon\,.$$

On peut montrer que, lorsque F est complet, $\lim_{+\infty} f$ existe dans F si et seulement si f vérifie le critère de Cauchy près de $+\infty$.
Toujours lorsque $E = \mathbb{R}$, on a un résultat similaire en $-\infty$.

Exercice 22. : Soit $(F, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace de Banach ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et U un ouvert de $\mathbb{R} \times F$. Soit $f : U \longrightarrow F$ une fonction de classe C^1. On suppose que la différentielle partielle $D_x f$ de f par rapport à la variable dans F est localement bornée, c'est-à-dire que, pour tout $(t_0; x_0) \in U$, il existe U_0 un voisinage ouvert de $(t_0; x_0)$ tel que

$$M_0 \;:=\; \sup_{(t;x)\in U_0} \big\|D_x f(t;x)\big\|_0 \;<\; +\infty\,.$$

Vérifier que f est localement lipschitzienne en la deuxième variable sur U.
Remarque : Si F est de dimension finie, le caratère localement borné de $D_x f$ provient du fait que f est C^1.

Exercice 23. : Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}; +)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que soit G est dense dans $\mathbb{R}$ ou (exclusif !) il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z} := \{na; n \in \mathbb{Z}\}$. Comme le sous-groupe $\{0\}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ mais est égal à $0\mathbb{Z}$, on suppose dans la suite que $G \neq \{0\}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le sous-groupe $a\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. (Indication : on pourra utiliser la division euclidienne par a.)
2. Montrer que $G \cap \mathbb{R}^{+*} \neq \emptyset$. Soit $a = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*}$. On a $a \geq 0$.
3. On suppose que $a = 0$.
   a). Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $K \cap]y - \epsilon; y + \epsilon[\neq \emptyset$. (Indication : on pourra montrer l'existence d'un $b \in]0; \epsilon[\cap K$ et effectuer la division euclidienne de y par b.)
   b). En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.
4. On suppose que $a > 0$.
   a). Montrer que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   b). Montrer par l'absurde que $G \subset a\mathbb{Z}$. (Indication : on pourra utiliser la division euclidienne par a.)

Exercice 24. : Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui à $x = (x_1; \cdots; x_d) \in \mathbb{R}^d$ associe

$$\|x\|_\infty \;=\; \sup\{|x_i|; 1 \leq i \leq d\}\,.$$

Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que le $\mathbb{R}$-e.v.n. $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 25. : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit qu'une partie B de E a la propriété de Borel-Lebesgue si, pour toute collection $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'ouverts U_α de E telle que

$$B \;\subset\; \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\,, \tag{8}$$

on peut trouver un sous-ensemble fini F de A tel que

$$B \;\subset\; \bigcup_{\alpha\in F} U_\alpha\,. \tag{9}$$

On note par $\mathcal{B}(a;r[$ (resp. $\mathcal{B}(a;r])$ la boule ouverte (resp. fermée) de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$.
L'objectif de l'exercice est de montrer qu'une partie B ayant la propriété de Borel-Lebesgue est forcément fermée et bornée. On considère donc une telle partie B.

1. Montrer que
$$B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(0;n[\,.$$
En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset \mathcal{B}(0;N[$ et que B est bornée.

2. On suppose que B n'est pas fermée. Donc $A = E \setminus B$ n'est pas ouvert. Montrer qu'il existe un $a \in A$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \mathcal{B}\Big(a;\frac{1}{n}\Big[\not\subset A\,. \tag{10}$$

3. Montrer que
$$B \subset E \setminus \{a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E \setminus \mathcal{B}\Big(a;\frac{1}{n}\Big]\,.$$

4. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset E \setminus \mathcal{B}(a;N^{-1}]$.

5. En déduire une contradiction avec (10).

Remarque : Une partie B de E ayant la propriété de Borel-Lebesgue est dite *compacte*. On a donc montré qu'un compact de E est nécessairement fermé et borné. La réciproque est vraie si E est de dimension finie mais fausse si E est de dimension infinie !

Exercice 26. : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. On note par E la fonction partie entière. L'objet de cet exercice est de montrer que le segment $[a;b]$ possède la propriété de Borel-Lebesgue définie dans l'exercice 25 et que l'on rappelle ici : Pour toute collection $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'ouverts U_α de $\mathbb{R}$ telle que
$$[a;b] \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\,, \tag{11}$$
on peut trouver un sous-ensemble fini F de A tel que
$$[a;b] \subset \bigcup_{\alpha\in F} U_\alpha\,. \tag{12}$$
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on pose $I(x;\delta) =]x-\delta;x+\delta[$.

1. Soit $\delta > 0$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble fini G_δ de $[a;b]$, dont on précisera le nombre d'éléments, tel que
$$[a;b] \subset \bigcup_{x\in G_\delta} I(x;\delta)\,.$$
(Indication : on pourra prendre $N = E(2(b-a)/(3\delta))$ et $G_\delta = \{a+(1+3k)\delta/2; 0 \leq k \leq N\}$).
Cette propriété étant vraie pour tout $\delta > 0$, on dit que $[a;b]$ est précompact.

2. On montre la propriété souhaitée par l'absurde. On suppose que l'on ait une collection $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ vérifiant (11) mais telle que (12) soit fausse pour tout sous-ensemble fini F de A. Construire par récurrence une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a;b]$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I(x_n;2^{-n})\cap I(x_{n+1};2^{-n-1})\neq\emptyset$ et telle que (12) avec $[a;b]$ remplacé par $I(x_n;2^{-n})$ soit fausse pour tout sous-ensemble fini F de A. (Indication : on pourra utiliser 1.).

3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle est donc convergente. On appelle c sa limite. Vérifier que $c\in[a;b]$. Par (11), il existe donc $\alpha_c\in A$ tel que $c\in U_{\alpha_c}$.

4. Montrer qu'il existe $r_c>0$ tel que $I(c;r_c)\subset U_{\alpha_c}$.

5. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $I(x_n;2^{-n})\subset I(c;r_c)$.

6. En déduire une contradiction.

Exercice 27. : Soit $(F,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$. On rappelle que $[a;b]$ est un compact de $\mathbb{R}$ (cf. Exercice 26 ou 28).
Soit $f:[a;b]\longrightarrow F$. On montre qu'elle est uniformément continue c'est-à-dire que la proposition suivante est vraie :

$$\forall\epsilon>0\,,\ \exists\delta>0\,;\ \forall(x;y)\in[a;b]^2\,,\quad |x-y|\,<\,\delta\ \Longrightarrow\ \|f(x)\,-\,f(y)\|\,<\,\epsilon\,.$$

1. Soit $\epsilon>0$. Montrer que, pour tout $x\in[a;b]$, il existe un $\delta_x>0$ tel que

$$f\big([a;b]\cap\,]x-2\delta_x;x+2\delta_x[\big)\ \subset\ \mathcal{B}\big(f(x);\epsilon/2\big[\,.$$

2. Montrer qu'il existe une famille finie $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de $[a;b]$ tel que

$$[a;b]\ \subset\ \bigcup_{i\in J}\,]x_j-\delta_{x_j};x_j+\delta_{x_j}\,[\,.$$

3. Soit $\delta=\min\{\delta_{x_j};j\in J\}>0$. Montrer que, pour $(x;y)\in[a;b]^2$ tel que $|x-y|<\delta$, $\|f(x)-f(y)\|<\epsilon$.

Exercice 28. : On utilise les notions de l'exercice 25 et le résultat de l'exercice 24. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit C une partie compacte de E.

1. Soit D une partie finie de E. Montrer que D est compacte.

2. Vérifier qu'une réunion finie de compacts est compacte.

3. Soit D un fermé de E vérifiant $D\subset C$. Vérifier que D est compact.

4. Soit $(F,\|\cdot\|')$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, U un ouvert de E contenant C et $f:U\longrightarrow F$ une application continue. Montrer que $f(C)$ est compacte.

5. On suppose que la boule $B = \mathcal{B}(0;1]$ est compacte. Comme B est recouverte par la réunion des boules ouvertes $\mathcal{B}(x;1/2[$, pour x décrivant B, il existe, par compacité, $x_1, \cdots, x_n \in B$ tel que

$$B \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_i; 1/2[\,.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{x_1; \cdots; x_n\}$ (donc F est de dimension finie $\leq n$). Montrer par l'absurde que $F = E$.
(Indication : prendre $a \in E \setminus F$ et considérer la distance de a à F.)

6. On suppose que $E = \mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'exercice 24. Pour $M \geq 0$, on pose $B_M = \mathcal{B}(0;M] = [-M;M]^d$. On montre par l'absurde que B_M est compacte. On suppose donc que B_M ne vérifie pas la propriété de Borel-Lebesgue, c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement

$$B_M \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \tag{13}$$

par une famille d'ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, indexée par un ensemble A, telle que, pour tout sous-ensemble fini F de A, on ait

$$B_M \not\subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha\,. \tag{14}$$

   a). Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini G_ϵ de E tel que

   $$B_M \subset \bigcup_{x \in G_\epsilon} B(x;\epsilon[\,.$$

   On dit que B_M est précompact.

   b). Construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B_M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\mathcal{B}(x_n; 2^{-n}[\cap \mathcal{B}(x_{n+1}; 2^{-n-1}[\neq \emptyset \tag{15}$$

   et, pour tout sous-ensemble fini F de A, on ait

   $$\mathcal{B}(x_n; 2^{-n}[\not\subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha\,. \tag{16}$$

   (Indication : on pourra utiliser 1.)

   c). Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   Comme E est complet, elle converge vers un certain x.
   Vérifier que $x \in B_M$.
   Par (13), il existe donc $\alpha_x \in A$ tel que $x \in U_{\alpha_x}$.

   d). Établir une contradiction.

7. Montrer que toute partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ (avec $d \in \mathbb{N}^*$) est compacte.

8. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que N est lipschitzienne (donc continue) de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En déduire qu'il existe $c_2 \geq c_1 > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $c_2\|x\|_\infty \geq N(x) \geq c_1\|x\|_\infty$.
   On dit que les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
   Montrer qu'en tant qu'espace topologigue, les espaces normés $(\mathbb{R}^d, N)$ et $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ sont identiques.
   Montrer que $(\mathbb{R}^d, N)$ est complet. Montrer qu'une partie C fermée et bornée de $(\mathbb{R}^d, N)$ est compacte.

9. On suppose que E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'une partie C de E est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Soit N_1 et N_2 deux normes sur E. Montrer qu'elles sont équivalentes. Montrer que (E, N_1) est complet.

10. Montrer que les résultats du 7 persiste pour un $\mathbb{C}$-e.v. F de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$. (Indication : on pourra voir $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-e.v.)

Remarque :
On a démontré le théorème de Riesz de la dimension qui dit que la boule unité fermée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé est compacte si et seulement si l'espace en question est de dimension finie (cf. cours d'analyse fonctionnelle).
Les points 7 et 8 de l'exercice établissent que les compacts d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont les fermés bornés et que les normes sur un tel espace sont toujours deux à deux équivalentes.
En combinant le point 4 et l'exercice 25, on a le résultat suivant : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, soit X une partie compacte de E et $f : X \longrightarrow F$ une application continue. Alors f est bornée.