Préliminaires et rappels.

Exercice 1. : Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$.

1. Montrer que $(a+b)/2 \in [a; b]$.
2. Montrer que, si $(a+b)/2 = a$ ou $(a+b)/2 = b$, alors $a = b$.

En particulier, si $a < b$, on a $(a+b)/2 \in]a; b[$.

Exercice 2. : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x \in I$. Montrer qu'il existe $(x_1; x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x < x_2$. (Indication : on pourra traiter séparément les différents types d'intervalle ouvert.)

Exercice 3. : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que m et m' soient des plus grands éléments de A. Montrer que $m = m'$.

Exercice 4. : On justifiera toute réponse. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

$$A := \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}, \ -A := \{-1/n; n \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{et} \quad B := \{n \in \mathbb{N}; -n^2 + 5n - 4 \geq 0\}.$$

1. Déterminer la borne supérieure de $[-2; 7]$.
2. Déterminer la borne supérieure de $[0; 2[$.
3. Vérifier que l'intervalle $]0; 7[$ est minoré mais n'a pas de plus petit élément.
4. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré.
5. Déterminer la borne supérieure de $\mathbb{Z}$.
6. Montrer que A n'a pas de plus petit élément.
7. Déterminer la borne supérieure de A.
8. Déterminer la borne supérieure de $-A$.
9. Déterminer la borne supérieure de $(-A) \cup [0; 2[$.
10. Déterminer la borne supérieure de B. Est-ce un maximum ?

Exercice 5. : Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On veut montrer que $\sup A \leq \sup B$.
Lorsque B n'est pas majorée, c'est-à-dire quand $\sup B = +\infty$, ce résultat est vrai car on a toujours $\sup A \leq +\infty$.
On traite maintenant le cas où B est majorée.

1. Montrer que $\sup B$ est un majorant de A.
2. En déduire que $\sup A \leq \sup B$.

Exercice 6. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b - a > 1$. Le but de l'exercice est de montrer que $]a;b[\cap\mathbb{Z}$ est non vide, autrement dit que l'intervalle $]a;b[$ contient un entier relatif.

1. Vérifier que $(11/3) - (13/7) > 1$. Trouver un nombre entier dans $]13/7\,;\,11/3[$.
2. On suppose $a \geq 0$. Soit
$$A \;:=\; \big\{p \in \mathbb{Z}\,;\; p \,>\, a\big\} \;=\; \big\{p \in \mathbb{N}\,;\; p \,>\, a\big\}\,.$$
Montrer que A est une partie non vide de $\mathbb{N}$.
3. Par le cours, A admet un plus petit élément noté $p_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que $p_0 \in]a;b[$.
4. On ne suppose plus que $a \geq 0$. Pourquoi existe-t-il $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq |a|$?
5. Montrer que $]a+N;b+N[$ contient un entier naturel. En déduire que $]a;b[$ contient un entier relatif.

Exercice 7. : On construit ici la fonction partie entière. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$A_x \;:=\; \big\{p \in \mathbb{Z}\,;\; p \leq x\big\} \quad \text{et} \quad E(x) \;:=\; \sup A_x\,.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier le fait que $E(x) \in \mathbb{R}$ et que $E(x) \leq x$.
2. Montrer que l'ensemble
$$B_x \;=\; \big\{p \in \mathbb{Z}\,;\; E(x) - 2 < p \leq x\big\}$$
est non vide et fini. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 6.)
3. Vérifier que $\sup B_x \leq E(x)$. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 5.)
4. Montrer que $E(x) = \sup B_x$.
5. En déduire que $E(x) \in \mathbb{Z}$.
6. Montrer que $x < E(x) + 1$. (Indication : on pourra faire une preuve par l'absurde.)

La fonction partie entière est la fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe le $E(x)$ défini plus haut. Elle vérifie donc la propriété

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad E(x) \;\leq\; x \;<\; E(x) + 1\,.$$

Exercice 8. : Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \geq 4n$.