Voisinages de $\mathbb{C}$, voisinages de $\mathbb{R}$.

Exercice 9. : Fonction racine carré sur $\mathbb{R}^+$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^2 = x$ à exactement deux solutions lorsque $x \neq 0$ et exactement une solution lorsque $x = 0$.

2. Déterminer l'ensemble A des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels les solutions de l'équation précédente sont toutes réelles.

3. Soit $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x}$ est la solution positive de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^2 = x$. Vérifier que $\sqrt{\cdot}$ est bien définie et que l'image $\sqrt{\cdot}(\mathbb{R}^+)$ de $\mathbb{R}^+$ par $\sqrt{\cdot}$ est $\mathbb{R}^+$.

4. Vérifier que, pour $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

5. Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante, c'est-à-dire que

$$\forall\,(x_1; x_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2\,, \quad \left(x_1 \,<\, x_2 \implies \sqrt{x_1} \,<\, \sqrt{x_2}\right).$$

Exercice 10. : On considère les propositions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \;&=\; \left(\forall\,(z; z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |z + z'| \;\leq\; |z| \,+\, |z'|\right),\\
\mathcal{Q} \;&=\; \left(\forall\,(z; z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad \big||z| \,-\, |z'|\big| \;\leq\; |z \,-\, z'|\right).
\end{aligned}$$

Vérifier l'équivalence $(\mathcal{P} \iff \mathcal{Q})$.

Exercice 11. : Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$. Par le cours, on sait que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. On cherche à savoir quand cette inégalité large est une égalité.
On remarque que c'est le cas si $z = 0$ et, dans ce cas, $z = 0 \cdot z'$.
On remarque que c'est aussi le cas si $z' = 0$ et, dans ce cas, $z' = 0 \cdot z$.
On prend maintenant $(z; z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

1. Montrer l'implication

$$\left(\exists\,\lambda \in \mathbb{R}^+; \quad z' \,=\, \lambda \cdot z\right) \implies \left(|z + z'| \,=\, |z| \,+\, |z'|\right).$$

2. Soit $(z; z') \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $|z + z'| = |z| + |z'|$. On écrit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec $(r, r') \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $(\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2$.

a). Exprimer $|z+z'|^2$ en fonction de $(r;r';\theta;\theta')$.
b). Vérifier que $\cos(\theta-\theta')=1$.
c). En déduire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $z'=\lambda z$.

On a montré, pour $(z;z')\in\mathbb{C}^2$, l'équivalence

$$\big(|z+z'| \;=\; |z|+|z'|\big) \iff \Big(\exists\,\alpha\in\mathbb{R}^+;\quad \big(z' = \alpha\cdot z\big)\quad \text{ou}\quad \big(z=\alpha\cdot z'\big)\Big)\,.$$

Exercice 12. : Disques de $\mathbb{C}$.

1. Soit $z_0\in\mathbb{C}$ et $r\in\mathbb{R}^+$. On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par

   $$A \;:=\; \big\{|z|\,;\; z\in D(z_0;r]\big\}\,.$$

   Montrer que $\sup A\leq |z_0|+r$. En déduire que $D(z_0;r]\subset D(0;|z_0|+r]$.

2. Soit $(z_0;z_1)\in\mathbb{C}^2$ et $(r_0;r_1)\in(\mathbb{R}^+)^2$.

   a). Montrer l'équivalence

   $$D(z_0;r_0[\cap D(z_1;r_1[\;\neq\;\emptyset \quad\iff\quad |z_0-z_1|\;<\;r_0+r_1\,.$$

   b). Montrer l'équivalence

   $$D(z_0;r_0]\;\cap\;D(z_1;r_1]\;\neq\;\emptyset \quad\iff\quad |z_0-z_1|\;\leq\;r_0+r_1\,.$$

   c). Montrer l'équivalence

   $$D(z_0;r_0[\subset\;D(z_1;r_1[\quad\iff\quad |z_0-z_1|\;+\;r_0\;<\;r_1$$

   d). Montrer l'équivalence

   $$D(z_0;r_0]\;\subset\;D(z_1;r_1] \quad\iff\quad |z_0-z_1|\;+\;r_0\;\leq\;r_1\,.$$

Exercice 13. : Soit $z_1\in\mathbb{C}$.

1. Soit $(r;r_1)\in(\mathbb{R}^+)^2$, $\theta\in\mathbb{R}$ et $z_0=z_1+re^{i\theta}\in\mathbb{C}$.

   a). On suppose $r<r_1$. Montrer que $D(z_1;r_1[$ est un voisinage complexe de z_0.
   b). On suppose $r=r_1$. Montrer que $D(z_1;r_1]$ n'est pas un voisinage complexe de z_0.

   On remarque que, dans le cas où $r>r_1$, $z_0\notin D(z_1;r_1]$ donc $D(z_1;r_1]$ n'est pas non plus un voisinage complexe de z_0.

2. Montrer que les ensembles
$$A \ := \ \big\{ z \in \mathbb{C} \, ; \ \Re(z) \in [-1;1] \big\} \quad \text{et} \quad B \ := \ \big\{ z \in \mathbb{C} \, ; \ \Im(z) \in]-1;2] \big\}$$
sont des voisinages complexes de 0 dans $\mathbb{C}$.

3. Montrer que les ensembles
$$A_1 \ := \ \big\{ z \in \mathbb{C} \, ; \ \Re(z - z_1) \in [-1;1] \big\} \quad \text{et} \quad B_1 \ := \ \big\{ z \in \mathbb{C} \, ; \ \Im(z - z_1) \in]-1;2] \big\}$$
sont des voisinages complexes de z_1 dans $\mathbb{C}$.

Exercice 14. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que l'intervalle $]-2;3[$ est un voisinage réel de 0. L'intervalle $]-2;3]$ est-il aussi un voisinage réel de 0 ?
2. L'intervalle $]-2;3[$ est-il un voisinage réel de 3 ? L'intervalle $]-2;3]$ est-il un voisinage réel de 3 ?
3. L'intervalle $]-2;3+10^{-2022}[$ est-il un voisinage réel de 3 ?
4. L'ensemble
$$A \ := \ \{0\} \bigcup \left\{ -\frac{1}{n} \, ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\} \bigcup \left\{ \frac{1}{n} \, ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
est-il un voisinage réel de 0 ?

Exercice 15. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que les points 0 et 3 sont adhérents à $]-2;3[$.
2. Le point 2 est-il adhérent à l'ensemble $[0;1] \cup [2{,}5;8[$?
3. Le point 2 est-il adhérent à $\mathbb{Z}$? Le point 2,5 est-il adhérent à $\mathbb{Z}$?
4. Trouver une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et un $a \in \mathcal{D}$ tels que a est adhérent à $\mathcal{D}$ mais a n'est pas adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$.

Exercice 16. : Montrer que la partie A de $\mathbb{C}$ donnée par
$$A \ := \ \big\{ z \in \mathbb{C} \, ; \ \Im(z) = 0 \, , \, \Re(z) \in]-1;1[\big\}$$
n'est pas un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. En identifiant $\mathbb{R}$ à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; \Im(z) = 0\}$, on peut considérer A comme une partie de $\mathbb{R}$. Est-elle un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$?

Exercice 17. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Vérifier qu'une partie bornée B de $\mathbb{R}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
3. Montrer que l'ensemble
$$A := \left\{x \in \mathbb{R};\ x^2 \geq 2\right\}$$
est un voisinage de $-\infty$.
4. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$?
5. $\mathbb{Z}$ est-il un voisinage de $-\infty$?

Exercice 18. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que $+\infty$ n'est pas adhérent à une partie bornée B de $\mathbb{R}$.
2. $+\infty$ est-il adhérent à $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$?
3. Montrer que $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{N}$.
4. $-\infty$ est-il adhérent à $\mathbb{Z}$?