Équations différentielles non-linéaires.

Exercice 47. : Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $z : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $z' = 1 - (1+z^2)^{-1}$.

1. Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (E).
2. On remarque que la fonction nulle est solution de (E). Soit z une solution non nulle de (E). Expliquer pourquoi z ne s'annule pas.
3. Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution maximale de (E) valant z_0 à $t = 0$. (Indication : on pourra traiter successivement les cas $z_0 < 0$, $z_0 = 0$ et $z_0 > 0$).

Exercice 48. : On considère sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles non linéaires du premier ordre suivantes :

$$(E_0) \,:\, y'(t) \;=\; \big(y(t)\big)^2, \quad (E_1) \,:\, y'(t) \;=\; t\,\big(y(t)\big)^2 .$$

On remarque, si y est solution de (E_0) sur I et $b \in \mathbb{R}$, alors l'application $\{t \in \mathbb{R}; t+b \in I\} \ni t \mapsto y(t+b)$ est solution de (E_0).

1. Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique aux deux équations sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est solution (maximale) de (E_0) et de (E_1).
3. Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (E_0) telle qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) > 0$. Montrer que y est strictement positive en tout point de I. Déterminer explicitement y sur I.
4. Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (E_0) telle qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) < 0$. Montrer que y est strictement négative en tout point de I. Déterminer explicitement y sur I.
5. Pour $a \in \mathbb{R}$, vérifier que $y_a^+ :]a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $y_a^+(t) = (a-t)^{-1} < 0$, et $y_a^- :]-\infty; a[\longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $y_a^-(t) = (a-t)^{-1} > 0$, sont des solutions de (E_0) sur $]a; +\infty[$ et $]-\infty; a[$, respectivement.
   Remarque : On ne peut pas prolonger strictement ces solutions puisqu'elles explosent près de a.

6. Donner explicitement les solutions maximales de (E_0).
   Remarque : La fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la seule solution maximale globale (i.e. définie sur $\mathbb{R}$ tout entier).

7. Déterminer les solutions maximales de (E_1).
   Remarque : L'équation (E_1) admet une infinité de solutions maximales globales mais aussi des solutions maximales non globales.

Exercice 49. : Soit $b \in \mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle non-linéaire sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$y'(t) \; = \; (b \, - 2t) \cdot \big(y(t)\big)^2 \, .$$

1. Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Montrer que (E) admet une seule solution maximale constante, à savoir la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'une solution maximale non nulle de (E) est strictement positive partout ou strictement négative partout.

4. Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $b^2 - 4c^{-1} < 0$. Montrer que la solution maximale y_1 de (E), valant c à $t = 0$, est définie sur $\mathbb{R}$ et la déterminer explicitement.

5. Soit $c \in \mathbb{R}^{-*}$. Montrer que la solution maximale y_2 de (E), valant c en 0, est définie sur l'intervalle
   $$\left] \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c^{-1}}}{2} \, ; \, \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c^{-1}}}{2} \right[$$
   et la déterminer explicitement.

6. Soit $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $b^2 - 4c^{-1} \geq 0$. Si $b > 0$, montrer que la solution maximale y_3 de (E), valant c en 0, est définie sur l'intervalle
   $$\left] -\infty \, ; \, \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c^{-1}}}{2} \right[$$
   et la déterminer explicitement. Si $b < 0$, montrer que la solution maximale y_3 de (E), valant c en 0, est définie sur l'intervalle
   $$\left] \frac{b + \sqrt{b^2 - 4c^{-1}}}{2} \, ; \, +\infty \right[$$
   et la déterminer explicitement.

Exercice 50. : Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note par $\| \cdot \|$ et par $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ la norme et le produit scalaire usuels de $\mathbb{R}^d$, respectivement. Pour $\sigma \in \{-1; 1\}$, on considère l'équation différentielle (E_σ) d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ et un voisinage de 0, équation donnée par $y' = (1/2)\sigma \|y\|^2 y$.

1. Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E_σ) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

2. Montrer que (E) admet une seule solution maximale constante, à savoir la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$.

3. Montrer que toute solution maximale $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ non identiquement nulle ne s'annule jamais.

4. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la solution maximale de (E_σ), valant z_0 en 0, et $v \in \mathbb{R}^d$. Montrer que l'on a, pour $t \in I$, $\langle v; z(t)\rangle = \langle v; z_0\rangle \exp(a_\sigma(t))$, où
$$a_\sigma(t) \;=\; \sigma \cdot \int_0^t \frac{\|z(s)\|^2}{2}\, ds\,.$$

5. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la solution maximale de (E_σ) qui vaut z_0 à $t = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g_\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ dérivable telle que, pour tout $t \in I$, $z(t) = g_\sigma(t) z_0$.

6. Soit $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une solution maximale de (E_σ). Montrer que la fonction $h_\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par $h_\sigma(t) = \sigma\|z(t)\|^2$ est solution de l'équation différentielle d'inconnue $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (J sous-intervalle de I) donnée par $x' = x^2$, c'est-à-dire de l'équation (E_0) de l'exercice 48.

7. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la solution maximale de (E_σ) qui vaut z_0 à $t = 0$. Montrer que h_σ est exactement la fonction $y_a^{-\sigma}$ pour $a = h_\sigma(0)^{-1}$. (On utilise les notations de l'exercice 48).
En particulier, si $\sigma = +1$, $I = \{t \in \mathbb{R}; t < \|z_0\|^{-2}\}$ et, pour $t \in I$, $h_+(t) = (\|z_0\|^{-2} - t)^{-1}$ et, si $\sigma = -1$, $I = \{t \in \mathbb{R}; t > -\|z_0\|^{-2}\}$ et, pour $t \in I$, $h_-(t) = -(\|z_0\|^{-2}+t)^{-1}$.

8. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Vérifier que $z_\sigma : \{t \in \mathbb{R}; \sigma t < \|z_0\|^{-2}\} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, définie par
$$z_\sigma(t) \;=\; \left(\|z_0\|^{-2} - \sigma t\right)^{-1/2} \cdot \|z_0\|^{-1} \cdot z_0\,,$$
est la solution maximale de (E_σ), valant z_0 en 0.

Remarque : On note que $\lim_{t\to\sigma\|z_0\|^{-2}} \|z_\sigma(t)\| \;=\; +\infty$ et $\lim_{t\to-\sigma\infty} z_\sigma(t) = 0$.

Exercice 51. : Soit $(F; \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé complet et V un ouvert non vide de F. Soit $g : V \longrightarrow F$ une application localement lipschitzienne. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. On va montrer que la fonction $f : I \times V \longrightarrow F$ donnée par $f(t; x) = r(t)g(x)$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
Soit (A) l'équation différentielle autonome d'inconnue $y : J \longrightarrow F$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par, pour tout $t \in J$, $y'(t) = g(y(t))$.
Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $y : J \longrightarrow F$, où J est un sous-intervalle de I, donnée par, pour tout $t \in J$, $y'(t) = f(t; y(t)) = r(t)g(y(t))$.
Soit $a \in I$ et $R : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$R(t) \;=\; \int_a^t r(s)\, ds\,.$$

Comme R est de classe C^1 et sa dérivée est partout strictement positive, elle est donc continue et strictement croissante, donc bijective de I sur l'intervalle ouvert $R(I)$, qui contient 0. De plus, sa bijection réciproque $R^{\langle -1 \rangle} : R(I) \longrightarrow I$ est de classe C^1.

1. Montrer que f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

2. Soit $x_0 \in F$ et $x : J \longrightarrow F$ la solution maximale de (A) valant x_0 en 0 (J est donc un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0). Construire à l'aide de x une solution h_x de (E) valant x_0 en a.

3. Soit $z_0 \in F$ et $z : \tilde{J} \longrightarrow F$ la solution maximale de (E) valant z_0 en a ($\tilde{J}$ est donc un sous-intervalle ouvert de I contenant a). Construire à l'aide de z une solution $\tilde{h}_z$ de (A) valant z_0 en 0.

4. Construire une bijection h de l'ensemble des solutions maximales de (A) avec temps initial 0 sur l'ensemble des solutions maximales de (E) avec temps initial a. Expliciter la bijection réciproque $h^{\langle -1 \rangle}$ de h.

5. Dans le cadre du 2, montrer que le domaine de définition $\mathcal{D}(h(x))$ de $h(x)$ est donné par $R^{\langle -1 \rangle}(R(I) \cap J)$.
   En particulier, si $J = \mathbb{R}$ alors $\mathcal{D}(h(x)) = I$.

6. Dans le cadre du 3, montrer que le domaine de définition $\mathcal{D}(h^{\langle -1 \rangle}(z))$ de $h^{\langle -1 \rangle}(z)$ vérifie $\mathcal{D}(h^{\langle -1 \rangle}(z)) \cap R(I) = R(\tilde{J})$.
   En particulier, si $R(I) = \mathbb{R}$ et $\tilde{J} = I$ alors $\mathcal{D}(h^{\langle -1 \rangle}(z)) = \mathbb{R}$.

Remarques :
Cet exercice justifie certaines affirmations du cours sur la reparamétrisation de solutions d'équations différentielles.
Lorsque $R(I) = \mathbb{R}$, on passe d'une solution maximale de (A) à une solution maximale de (E) en composant à droite par R.
Lorsque $R(I) \neq \mathbb{R}$, la composée à droite par $R^{\langle -1 \rangle}$ d'une solution maximale de (E) est une restriction d'une solution maximale de (A). Cette restriction est stricte si la solution maximale de (A) correspondante est globalement définie.
Si toutes les solutions maximales de (A) sont globales, il en est de même de celles de (E).
Si toutes les maximales de (E) sont globales et si $R(I) = \mathbb{R}$, les solutions maximales de (A) sont globales.
Dans tous les cas, on peut déduire les solutions maximales de (E) de celles de (A).

Exercice 52. : Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, équation donnée par $Y' = Y^2$. On note par I_2 la matrice identité 2×2 et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note par $\tilde{A}$ la co-matrice de A, par $\operatorname{tr} A$ sa trace et par $\det A$ son déterminant. On rappelle que $(\tilde{A})^T \cdot A = (\det A) I_2$, où T désigne la transposition des matrices. On rappelle que la fonction det est différentiable et que sa différentielle au point A est donnée, pour $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par

$$D(\det)(A).H = \operatorname{tr}((\tilde{A})^T \cdot H) .$$

On remarque que, si Y est solution de (E) sur I, il en est de même de Y^T et, pour $t_1 \in \mathbb{R}$, l'application $\{t \in \mathbb{R}; t + t_1 \in I\} \ni t \mapsto Y(t + t_1)$ est aussi solution de (E).

1. Soit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $F(X) = X^2$. Montrer que F est localement lipschitzienne.
   Elle est donc continue et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (E) sur $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que (E) admet une solution constante, définie sur $\mathbb{R}$ et différente de la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
   On remarque que la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est aussi une solution de (E).

3. Soit $Y_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $Y : I \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la solution maximale de (E), valant Y_0 en 0. Justifier le fait que, sur I,

$$Y^2 \; - \; (\operatorname{tr} Y) \cdot Y \; + \; (\det Y) \cdot I_2 \; = \; 0 . \tag{28}$$

   En déduire que Y est solution sur I de l'équation linéaire d'inconnue $Z : I \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$Z' \; = \; (\operatorname{tr} Y) \cdot Z \; - \; (\det Y) \cdot I_2 . \tag{29}$$

   Montrer sur I que

$$(\operatorname{tr} Y)' = (\operatorname{tr} Y)^2 - 2(\det Y) \quad \text{et} \quad (\det Y)' = (\operatorname{tr} Y) \cdot (\det Y) . \tag{30}$$

4. Dans le cadre du 3, en supposant connues les fonctions $\operatorname{tr} Y$ et $\det Y$, déterminer explicitement Y en fonction de Y_0 et de ces fonctions.

5. Dans le cadre du 3, on suppose de plus que $4(\det Y) = (\operatorname{tr} Y)^2$ sur I. Montrer que, sur I, $(Y - (1/2)(\operatorname{tr} Y)I_2)^2 = 0$. Déterminer explicitement $\operatorname{tr} Y$ et $\det Y$ sur I.

6. Soit $(a_0; b_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Montrer que la solution maximale $Y : I \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de (E), valant $Y_0 = a_0 I_2 + b_0 N$ à $t = 0$, est de la forme $Y = aI_2 + bN$, pour des fonctions $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$. (Indication : on pourra montrer que la fonction $4(\det Y) - (\operatorname{tr} Y)^2$ est solution d'une équation différentielle linéaire sur I).

7. Dans le cadre du 3, on suppose de plus que $\det Y_0 \neq 0$. En déduire que $\det Y$ ne s'annule pas sur I. Montrer qu'il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I$, $(\operatorname{tr} Y)(t) = (b - 2t) \cdot (\det Y)(t)$. (Indication : on pourra dériver sur I le quotient $\operatorname{tr} Y / \det Y$). Déterminer explicitement $\det Y$ et $\operatorname{tr} Y$ sur I. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 49).

8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(s; d) = (s^2 - 2d; sd)$. Montrer que f est localement lipschitzienne.
   Soit (e) l'équation différentielle d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $y' = f(y)$. Elle vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

9. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $y_0 = (s_0; 0) \in \mathbb{R}^2$. Soit $y = (s; d)$ la solution maximale de (e) valant y_0 en t_0. Montrer que d est constamment nulle et déterminer explicitement s.

10. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $y_0 = (s_0; d_0) \in \mathbb{R}^2$ avec $d_0 \neq 0$. Soit $y = (s; d)$ la solution maximale de (e) valant y_0 en t_0. Montrer que d ne s'annule jamais. Exprimer s en fonction de d. (Indication : on pourra étudier la dérivée de s/d). En déduire explicitement y.

11. Déterminer les solutions maximales de (E).

Exercice 53. : Soit A la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions réelles définies et continues sur $[0; 1]$ muni de la norme $\| \cdot \|$ donnée par, pour $f \in F$,

$$\|f\| \ = \ \sup_{x \in [0;1]} \left| f(x) \right| .$$

On considère l'équation différentielle (E) d'inconnue $y : I \longrightarrow A$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, équation donnée par $y' = y^2$. Pour $t \in I$, $y(t)$ est une fonction continue sur $[0; 1]$. On notera sa valeur au point $x \in [0; 1]$ par $y(t; x)$ (au lieu de $y(t)(x)$). Dire qu'une telle fonction y est solution de (E) sur I signifie que, tout $t \in I$, les fonctions continues $y'(t)$ et $y(t)^2$ coïncident sur $[0; 1]$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in [0; 1]$, $y'(t; x) = (y(t; x))^2$. Attention, le "prime" désigne la dérivée partielle par rapport à t. Attention, l'espace A est un $\mathbb{R}$-e.v.n. de dimension infinie.

1. Soit $F : A \longrightarrow A$ donnée par, pour $f \in A$, $F(f) = f^2$. Montrer que F est C^1 et que sa différentielle DF est localement bornée.
   En particulier le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique (E) sur $\mathbb{R} \times A$.

2. Soit $y : I \longrightarrow A$ une solution de (E) telle que, pour tout $t \in I$, la fonction $y(t)$ est strictement positive sur $[0; 1]$. Déterminer la forme nécessaire que y.

3. Soit $c \in A$ une fonction strictement positive. Vérifier que $d = \inf_{x \in [0;1]} c(x) > 0$. Soit $I =]-\infty; d[$ et $y : I \longrightarrow A$ définie par $y = (c - t)^{-1}$. Vérifier que y est la solution maximale de (E) valant $1/c$ à $t = 0$. Que peut-on dire de $\lim_{t \to d} \|y(t)\|$?

Exercice 54. : Soit $E = \mathrm{L}^1([0; 1]; \mathbb{R}; dx)$, le $\mathbb{R}$-e.v des fonctions réelles définies et intégrables sur $[0; 1]$, muni de la norme L^1 notée $\| \cdot \|_1$. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $h(u) = u$ si $u \leq 1$ et $h(u) = \sqrt{2u - 1}$ si $u > 1$. On va voir que h est C^1. Soit $F : E \longrightarrow E$ donnée par $F(f) = (h'(f))^{-1}$, c'est-à-dire, pour $x \in [0; 1]$, $F(f)(x) = (h'(f(x)))^{-1}$. Soit (F) l'équation différentielle d'inconnue $y : I \longrightarrow E$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $y' = F(y)$.

1. Vérifier que h est C^1, déterminer explicitement h'. Montrer que h est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque notée $h^{\langle -1 \rangle}$.

2. Montrer que $(h')^{-1} = 1/h'$ est continue, C^1 par morceaux et 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que F est bien définie et globalement 1-lipschitzienne. En particulier, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (F).

4. Soit $z_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la solution maximale φ de l'équation différentielle d'inconnue $z : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $z' = (h'(z))^{-1}$, qui vaut z_0 en $t = 0$, est définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = h^{\langle -1 \rangle}(t + h(z_0))$.

5. Soit $c \in \mathbb{R}$ et y_0 la fonction constante égale à c sur $[0; 1]$. On a $y_0 \in E$. Montrer que la solution maximale de (F) valant y_0 à $t = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la déterminer explicitement.

6. Soit $c \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ et la fonction $y_0 : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $y_0(x) = cx^\alpha$. Montrer que la solution maximale de l'équation (F) valant y_0 à $t = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la déterminer explicitement.

Exercice 55. : On considère sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles (E) et (F) d'inconnue réelle donnée par $yy' = t$ et par $yy' = 3t^2/2$, respectivement.

1. Soit I un intervalle, voisinage de 0, soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) telle que $y(0) = y_0$. Montrer que, pour $t \in I$, $y(t)^2 = t^2 + y_0^2$.

2. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Montrer que (E) admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ et valant y_0 en $t = 0$.

3. Montrer que (E) admet deux solutions définies sur $\mathbb{R}$ et valant 0 en $t = 0$.

4. Soit I un intervalle, voisinage de 0, soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (F) telle que $y(0) = y_0$. Montrer que y ne s'annule pas. En déduire que $I \subset]-|y_0|^{2/3}; +\infty[$.

5. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Montrer que (F) admet une unique solution définie sur $]-|y_0|^{2/3}; +\infty[$ et valant y_0 en $t = 0$.

6. Montrer qu'il n'existe pas de solution $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de (F) définie sur un voisinage ouvert I de 0 et valant 0 en $t = 0$.

7. Montrer qu'il existe une solution $y_0 : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de (F) valant 0 en $t = 0$.

Remarque : Ces deux équations ne pouvant pas se mettre sous forme normale, on ne peut leur appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Le point 3 montre que (E) admet deux solutions maximales différentes valant 0 en 0, ce qui est contraire au résultat du théorème de Cauchy-Lipschitz. Le point 6 montre que (F) n'admet aucune solution valant 0 en 0, ce qui est aussi contraire au résultat du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 56. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue donnée par $f(x) = \sqrt{|x|}$. En particulier, $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = |x|^{1/2}$.

1. Montrer que f est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que f n'est pas localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

3. Trouver deux solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(y)$ qui valent 0 en 0.

Exercice 57. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue donnée par $f(x) = \sqrt{|x|}$ et g sa restriction à $\mathbb{R}^*$. Soit (E) (resp. (E')) l'équation différentielle donnée par $y' = f(y)$ (resp. $y' = g(y)$). D'après le 1 de l'exercice 56, on sait que g est localement lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc à (E').
On remarque que, pour les deux équations (E) et (E'), les solutions définies sur un intervalle sont croissantes. De plus, si I est un intervalle infini de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (E) (resp. (E')) alors la fonction $\psi : -I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\psi(t) = -\varphi(-t)$, où $-I = \{-t; t \in I\}$, est aussi une solution de (E) (resp. (E')).

1. Soit $y_+ > 0$ et $t_+ \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution maximale de (E') qui vaut y_+ en t_+.

2. Soit $y_- < 0$ et $t_- \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution maximale de (E') qui vaut y_- en t_-.

3. Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution non nulle de (E). Il existe $t_0 \in I$ tel que $\varphi(t_0) \neq 0$. Par exemple, $\varphi(t_0) > 0$.

   a). Montrer que φ ne s'annule pas pour une valeur supérieure à t_0.
   Remarque : Si φ ne s'annule jamais alors elle est forcément la restriction d'une solution maximale de (E') du type du 2.

   b). On suppose que φ s'annule. Par a), c'est forcément à gauche de t_0. Soit
   $$t_1 \;=\; \sup\left\{t \in I\,; \quad t \leq t_0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 0\right\}.$$
   Vérifier que $\varphi(t_1) = 0$. Déterminer la restriction de φ à $[t_1; +\infty[\cap I$.
   Remarque : φ peut très bien être constamment nulle à gauche de t_1.

   c). Sous l'hypothèse du b), on suppose que φ n'est pas identiquement nulle sur $I\cap]-\infty; t_1]$. Donc φ prend une valeur strictement négative en $t_2 < t_1$. Montrer que la restriction de φ à $I\cap]-\infty; t_2]$ ne s'annule pas.

   d). Sous l'hypothèse du c), soit
   $$t_3 \;=\; \inf\left\{t \in I\,; \quad t_2 \leq t \leq t_1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 0\right\}.$$
   Vérifier que $\varphi(t_3) = 0$. Déterminer la restriction de φ à $]-\infty; t_3]\cap I$. Que vaut φ sur $[t_3; t_1]$?

4. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) qui prend une valeur strictement négative en un point t_0' de J. Donner l'allure de ψ.

5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E). Montrer que φ s'annule.

6. Contruire explicitement une fonction $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est une solution de (E), qui s'annule sur un intervalle de longueur strictement positive, qui prend une valeur strictement négative et qui prend une valeur strictement positive.

Remarque : on a en fait déterminé toutes les solutions de (E). On note que les parties de signe strict constant d'une solution de (E) sont des restrictions de solutions maximales de (E'). On voit aussi que les solutions maximales de (E') explosent à l'infini et tendent vers 0 à l'autre extrémité de leur intervalle de définition. En particulier, on peut toutes les prolonger en des solutions de (E). On remarque aussi que, pour tout $(t_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$, on peut construire une infinité de solutions de (E), définies sur $\mathbb{R}$ et qui prennent la valeur y_0 en t_0.

Exercice 58. : Soit $E_1 = \mathrm{L}^1([0;1];\mathbb{R};dx)$ muni de la norme L^1 notée $\|\cdot\|_1$. Soit $E_2 = \mathrm{L}^2([0;1];\mathbb{R};dx)$ muni de la norme L^2 notée $\|\cdot\|_2$. On rappelle que l'injection $E_2 \subset E_1$ est continue. Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $y : I \longrightarrow E_2$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $y' = y^2$.

1. Vérifier que $F : (E_2; \|\cdot\|_2) \longrightarrow (E_1; \|\cdot\|_1)$ donnée par $F(f) = f^2$ est continue.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions de E_2 donnée par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x \in]0;1]$, $f_n(x) = x^{-1/2}\mathbb{1}_{[n^{-1};1]}(x)$. Vérifier que $(\|f_n\|_1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et que $\lim \|f_n\|_2 = +\infty$.
3. En déduire que $F : (E_2; \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E_1; \|\cdot\|_1)$ n'est pas continue (et donc non localement lipschitzienne).
4. Vérifier que $\tau :]-\infty; 1[\longrightarrow E_2$ donnée, pour $t < 1$, par $\tau(t) = (1-t)^{-1}\mathbb{1}_{[1/2;1]}$ est une solution maximale de (E) valant $\mathbb{1}_{[1/2;1]}$ à $t = 0$.
5. Soit $\alpha \geq 0$ et $y_0 \in E_2$ donnée par $y_0(x) = x^\alpha$, pour $x > 0$. Montrer que la fonction $\varphi :]-\infty; 1[\longrightarrow E_2$ donnée par $\varphi(t) = (y_0^{-1} - t)^{-1}$ est une solution maximale de (E) valant y_0 à $t = 0$.
6. Pour $\alpha > 0$, dessiner côte à côte les graphes de $\varphi(t)$ pour $t < 0$, $t = 0$ et $0 < t < 1$.
7. Soit $-1/2 < \alpha < 0$ et $y_0 \in E_2$ donnée par $y_0(x) = x^\alpha$, pour $x > 0$. On fixe un $\beta \in](\alpha+1)^{-1}; -\alpha^{-1}[$ et on définit
$$\begin{array}{rccc} \psi : &]-\infty; 1[& \longrightarrow & E_2 \\ & t & \mapsto & \psi_t \end{array}$$
définie par, pour $t \leq 0$, pour $x \in]0;1]$, $\psi_t(x) = (x^{-\alpha} - t)^{-1}$, et, pour $0 < t < 1$, $\psi_t(x) = (x^{-\alpha} - t)^{-1}$ si $x \geq t^\beta$ et $\psi_t(x) = 0$ sinon. Montrer que ψ est une solution maximale de (E) valant y_0 à $t = 0$.
8. Dessiner côte à côte les graphes de ψ_t pour $t < 0$, $t = 0$, $0 < t < 4^{-1}$ et $1 - 4^{-1} < t < 1$.

Remarque : lorsque $-1/2 < \alpha < 0$, l'équation (E) a donc une infinité de solutions maximales valant “$y_0 = x^\alpha$” à $t = 0$.