Limite de suites.

Exercice 19. : Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $d \in \mathbb{C}$. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ la suite arithmético-géométrique de premier terme d et associée à $(a;b)$.

1. Vérifier que l'on a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n \;=\; d \cdot a^n \;+\; b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,. \tag{1}$$
En particulier, lorsque $b = 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d \cdot a^n$.

2. Lorsque $a = 1$, vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d + nb$.

3. On suppose $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \;=\; \frac{1\,-\,a^n}{1\,-\,a} \;=\; \frac{a^n\,-\,1}{a\,-\,1}\,. \tag{2}$$

4. Lorsque $a \neq 1$, donner une expression de u_n en fonction de n, qui est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 20. : Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-\ell} \cdot b^{\ell}\,, \tag{3}$$
où, pour $k \in [\![0;n]\!]$,
$$C_n^k \;:=\; \frac{n!}{(k!)\cdot\big((n-k)!\big)}\,.$$

Exercice 21. : Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n \;:=\; \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\,.$$

1. Vérifier que u est strictement négative.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une formule explicite en fonction de n de la somme partielle de u :
$$s_n \;:=\; \sum_{k=1}^{n} u_k\,.$$

Exercice 22. : On considère les suites $u = (2)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (n^2 - 4n + 4)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sont-elles monotones à partir d'un certain rang ? Sont-elles strictement monotones à partir d'un certain rang ? Sont-elles majorées ? Sont-elles minorées ? Sont-elles bornées ? Justifier toute réponse.

Exercice 23. : Soit $u = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que la suite u est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'elle est strictement croissante à partir du rang 1.
2. Montrer que u n'est pas majorée.

Exercice 24. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \;=\; 2^n \quad \text{et} \quad v_n \;=\; \left(2^2\right)^n .$$

1. Vérifier que u est une extractrice.
2. Vérifier que v est une sous-suite de u.
3. La suite v est-elle égale à la sous-suite $(u \circ u)$ de u ?

Exercice 25. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que 1 et $+\infty$ ne peuvent être tous deux une limite de u.

Exercice 26. : Montrer la convergence des suites suivantes en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

1. $u = (3/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. $v = (5 + (4/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. $w = 2u$.
4. $z : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n > 0$,

$$z_n \;:=\; 3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot i \,.$$

Exercice 27. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite $|u|$ est majorée par 3. On suppose, de plus, que u converge vers -2 et que v converge vers $3/2$. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers -3.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que

$$u_n \cdot v_n + 3 = u_n \cdot (v_n - (3/2)) + (3/2) \cdot (u_n + 2) .$$

2. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers -3.

Exercice 28. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que les propositions suivantes sont équivalentes.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(1) &:= \big(\forall \epsilon > 0 \,,\, \exists N \in \mathbb{N} ;\ \forall n \in \mathbb{N} \,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big) \,,\\
\mathcal{P}(2) &:= \big(\forall \epsilon > 0 \,,\, \exists N \in [\![2022; +\infty[\![;\ \forall n \in \mathbb{N} \,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big) \,,\\
\mathcal{P}(3) &:= \big(\forall \epsilon \in]0;1] \,,\, \exists N \in [\![2022; +\infty[\![;\ \forall n \in \mathbb{N} \,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big) \,,\\
\mathcal{P}(4) &:= \big(\forall \epsilon \in]0;1] \,,\, \exists N \in \mathbb{N} ;\ \forall n \in \mathbb{N} \,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big) \,.
\end{aligned}$$

2. Montrer que $\mathcal{P}(1)$ est aussi équivalente à

$$\mathcal{Q} := \big(\forall \epsilon > 0 \,,\, \exists N \in \mathbb{N} ;\ \forall n \in \mathbb{N} \,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| \leq \epsilon)\big) \,.$$

3. Soit

$$\mathcal{R} := \big(\forall \epsilon \geq 0 \,,\, \exists N \in \mathbb{N} ;\ \forall n \in \mathbb{N} \,,\quad (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| \leq \epsilon)\big) \,.$$

Donner un exemple de suite réelle u et de réel ℓ pour lesquels l'implication

$$\mathcal{P}(1) \implies \mathcal{R}$$

est fausse.
En particulier, $\mathcal{R}$ n'est pas toujours équivalente à $\mathcal{P}(1)$. Cependant, on peut vérifier que la proposition $(\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{P}(1))$ est toujours vraie.

Exercice 29. : Montrer l'existence de la limite des suites suivantes en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes.

1. $u = (3n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. $v = (5 + 4n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 30. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite u converge vers 3. On suppose que v diverge vers $+\infty$. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers $+\infty$.

1. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_1$, $u_n \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_2$, $v_n > 0$.
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite uv tend vers $+\infty$.

Exercice 31. : Soit $u : [\![2; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle convergeant vers -3. On veut montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite $(1/u)$ tend vers $-1/3$.

1. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_1$, $-4 < u_n < -2$.
   En particulier, u ne s'annule pas à partir du rang N_1 donc $(1/u)$ est définie à partir de ce rang N_1.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N_1$, vérifier que
$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{-1}{3} \right| \leq \frac{|u_n + 3|}{6} .$$
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite $(1/u)$ tend vers $-1/3$.

Exercice 32. : Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite complexe dont la partie réelle converge vers 2 et la partie imaginaire converge vers -3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que la suite u converge.

Exercice 33. : Montrer, en utilisant des sous-suites, que les suites

1. $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. $(\sin(n\pi/6))_{n\in\mathbb{N}}$
3. et $(\exp(in\pi/5))_{n\in\mathbb{N}}$

n'ont pas de limite.

Exercice 34. : Soit $a = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\lim a$ et $\lim b$ existent et valent $+\infty$.

Exercice 35. : Déterminer la borne supérieure des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $A := [0; 3[$;

2. $B := [3;7[\cap]0;5]$;

3.
$$C \ := \ \left\{\frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}\ ;$$

4. $D := \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$;

5.
$$E \ := \ \left\{3\ -\ \frac{1}{n}\,;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}\ .$$

Exercice 36. : On considère la partie

$$A \ = \ \left\{\left(1\ +\ \frac{1}{n}\right)\cdot(-1)^n\,;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

de $\mathbb{R}$. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 37. : Étudier la limite des suites :

1. $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $a_n = 2n+1$,
2. $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $b_n = n^3 - n$,
3. $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$u_n \ = \ \frac{n^3\ -\ n\ +\ 7}{n^4\ +\ 2n^2\ +\ 1}\ ,$$
4. $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$v_n \ = \ \frac{n^5\ -\ n^3\ +\ 2n\ -\ 3}{n^2\ +\ 1}\ ,$$
5. $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = n + (-1)^n$.

Exercice 38. : Montrer la convergence des suites

1. $(\sin(n)/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,
2. $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$v_n \ = \ \frac{\cos\big(e^n + n^3 - n^7 - 2\big)}{2n+1}$$
3. et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$w_n \ = \ \frac{n + \sin(n)}{n+3}\ .$$

Exercice 39. : On **admet** l'existence et l'unicité de suites $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ et $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que $u_0 = 1$, $v_0 = 5$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; \frac{u_n \,+\, v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \;=\; 2 \cdot \left(\frac{1}{u_n} \,+\, \frac{1}{v_n} \right)^{-1} \,.$$

1. Montrer que la proposition $\mathcal{P}(n) = (u_n \leq u_{n+1} < v_{n+1} \leq v_n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} \,-\, v_{n+1}| \;\leq\; \frac{|u_n \,-\, v_n|}{2} \,.$$

3. En déduire que u et v sont adjacentes. Soit ℓ leur limite commune.

4. Montrer que $\ell \geq 0$.

5. Déterminer explicitement ℓ. (Indication : on pourra considérer la suite $u \cdot v$.)