Limites de fonctions.

Exercice 42. : Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.

1. Montrer que f_0 est croissante et paire.
2. Montrer que f_n est paire si n est pair et que f_n est impaire si n est impair.
3. f_2 est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$?
4. f_3 est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$?
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
6. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_{2p+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_{2p} est minorée.
8. f_3 est-elle majorée ? minorée ?

Exercice 43. : On rappelle qu'une implication $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$ est vraie si $\mathcal{P}$ est fausse.
Soit $\mathcal{D} = \{0\} \cup [1; +\infty[$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = x$. On pose $\mathcal{D}_{\neq 0} = \mathcal{D} \setminus \{0\}$ et on note par g la restriction de f à $\mathcal{D}_{\neq 0}$.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad |x+1| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon\,.$$
2. Vérifier que f est continue en 0.
3. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}_{\neq 0}\,, \quad |x| < \delta \implies |g(x) - \ell| < \epsilon\,.$$

Remarques : le résultat du 1 montre qu'au point -1, qui n'est pas adhérent à $\mathcal{D}$, la proposition disant "ℓ est limite de f en -1" est vraie, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$. C'est pour éviter ce phénomène de limites multiples que l'on a imposé dans le cours de ne considérer une limite qu'en un point adhérent au domaine de définition.
On a le même phénomène au 3, avec g cette fois. C'est encore pour l'éviter que l'on a imposé, pour la limite épointée de f en 0, que 0 soit adhérent à $\mathcal{D}_{\neq 0} = \mathcal{D} \setminus \{0\}$.

Exercice 44. : Soit $f :]-2;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par, pour $x > 0$, $f(x) = x^2$ et par, pour $-2 < x \leq 0$, $f(x) = 1$.

1. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que f est continue en 2.
2. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que f est continue en -1.
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que f est continue à gauche en 0.
4. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que $\lim_{0^+} f = 0$.
5. Que peut-on dire de $\lim_{0} f = 0$?

Exercice 45. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(x)$. On admet que la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
2. Retrouver le résultat précédent en utilisant des propriétés du cours.
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que f est continue en $-\pi/2$.
4. Retrouver le résultat précédent en utilisant des propriétés du cours.

Exercice 46. : Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 1/x$. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que $\lim_{0^+} f = +\infty$ et que $\lim_{0^-} f = -\infty$. Retrouver ces résultats en utilisant des propriétés du cours.

Exercice 47. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 3 = (x-1)g(x)$.
2. Montrer que, pour $x \in [0;2]$, $g(x) \in [2;8]$.
3. Montrer, en n'utilisant que la définition de limite ou une de ses formulations équivalentes, que f est continue en 1.

4. Retrouver le résultat précédent en utilisant les résultats du cours sur les opérations sur les limites.

Exercice 48. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $f(x) = x$ et, pour $x < 0$, $f(x) = x + 1$.

1. Vérifier que f est croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$. A-t-elle une limite à gauche en 0 ? Si oui, préciser laquelle.

2. Vérifier que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. A-t-elle une limite à droite en 0 ? Si oui, préciser laquelle.

3. La fonction f est-elle continue en 0 ?

4. La fonction f est-elle croissante ?

Exercice 49. : On considère les fonctions $f_1 :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2 :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_3 :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définies de la façon suivante : pour $x \in]-1;1[$, $f_1(x) = x$; pour $x \in [0;1[$, $f_2(x) = x$ et, pour $x \in]-1;0[$, $f_2(x) = -1$; pour $x \in]-1;1[$, $f_1(x) = |x|$.
Pour $f \in \{f_1; f_2; f_3\}$, déterminer $\inf f$ et $\sup f$.

Exercice 50. : On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ construite dans l'exercice 9. On pourra utiliser librement les résultats de cet exercice 9.

1. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que E est continue en a.

2. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que E est continue à droite en p.

3. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Déterminer la limite à gauche en p de E. La fonction E est-elle continue en p ?

4. Montrer que E est croissante.
   En particulier, par le cours, les limites $\lim\limits_{-\infty} E$ et $\lim\limits_{+\infty} E$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

5. Déterminer $\lim\limits_{-\infty} E$ et $\lim\limits_{+\infty} E$.

6. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} E(x)/x$ existe et vaut 1.

7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = E(x) + E(2 - x)$. Déterminer l'ensemble C des points de $\mathbb{R}$ où f est continue.

8. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = E(x - E(x))$. Déterminer l'ensemble D des points de $\mathbb{R}$ où g est continue.

9. On **admet** que la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(\pi x) \cdot E(x)$. La fonction h est-elle continue ?

10. Soit $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = (1 + E(x) - x) \cdot (x - E(x))$. Déterminer l'ensemble E des points de $\mathbb{R}$ où k est continue.

Exercice 51. : Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas de limite aux endroits considérés :

1. $f_1 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 1/x$, en 0.
2. $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, en $+\infty$.
3. $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin(x)$, en $+\infty$.
4. $f_4 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sin(1/x)$, en 0^+.

Exercice 52. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ (par exemple, donnée par $g(x) = \exp(x^3 - 7x - 3x^3 \ln(x) - x^3 \sin(x))$).

1. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
2. La fonction $(f + g)/2$ a-t-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?

Exercice 53. : On considère la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$ définie dans l'exercice 11. On pourra utiliser les résultats de cet exercice.

1. Montrer que $\ell := \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Vérifier que $\ell = +\infty$.
3. Montrer que $\ell' := \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$ existe dans $\mathbb{R}^+$.
   En particulier, par le cours, $\sqrt{\cdot}$ est continue en 0.
4. Soit $a > 0$. Pourquoi a-t-on $\sqrt{a} > 0$? Montrer que
$$\forall\, (x; y) \in [a; +\infty[^2 , \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{a}} .$$
5. En déduire que $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On a donc montré que $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, son domaine de définition.

Exercice 54. : Montrer que les limites suivantes existent et calculer leur valeur :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^{-1} + 2} , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{x^7 + 3x^3 + 2} , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^9}{x^4 + 1} , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x}{3x^3 - 5} .$$

Exercice 55. : Montrer que les limites suivantes existent et calculer leur valeur :

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\big(1/x\big)\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sin(x)}{3x+2}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{\sqrt{x^7+3x^3+2}}\,.$$

On pourra utiliser les résultats de l'exercice 53.

Exercice 56. : Soit $(c;d) \in \mathbb{R}^2$. On considère les trois fonctions suivantes.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x > 1$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ et par, pour $x \leq 1$, $f(x) = 0$.
Soit $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $0 < x < 1$, $g(x) = (3 + \sqrt{1-x}) \cdot (1/x)$ et par, pour $x \geq 1$, $g(x) = c^2x^2 - cx + 1$.
Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x < 0$, $h(x) = (x-2)/\sqrt{-x}$ et par, pour $x \geq 0$, $f(x) = d + x^3$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 1. Déterminer son prolongement.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles g admet un prolongement par continuité en 1.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de d pour lesquelles h admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 57. : On utilise la fonction racine carré $\sqrt{\cdot}$ définie dans l'exercice 11. On pourra utiliser librement les résultats de cet exercice.
Soit $\mathcal{D} = [-1/2; +\infty[$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq -1/2$, $f(x) = \sqrt{2x+1}$. On va vérifier que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Soit $d \geq 0$. Par le cours, la suite récurrente $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ de premier terme d et associée à f est bien définie. Elle vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; f(u_n)\,.$$

1. Vérifier que f est continue et que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
2. Montrer que, si u converge vers un réel ℓ, alors $\ell \geq 0$ et $f(\ell) = \ell$.
3. Montrer que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ donnée par $f(x) = x$ a $\ell := 1 + \sqrt{2}$ pour unique solution.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - \ell \;=\; \frac{2}{\ell + \sqrt{2u_n+1}} \cdot (u_n - \ell)\,. \tag{5}$$
5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\big|u_{n+1} - \ell\big| \;\leq\; \frac{2}{2+\sqrt{2}} \cdot |u_n - \ell|\,. \tag{6}$$

6. On pose $r = 2/(2+\sqrt{2})$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq |d - \ell| \cdot r^n$.

7. La suite u admet-elle une limite ? Si oui, la déterminer.

Exercice 58. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1/4$. Soit $d \geq 2$. Par le cours, la suite récurrente $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ de premier terme d et associée à f est bien définie. Elle vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; f(u_n)\,.$$

La suite u admet-elle une limite ? Si oui, la déterminer.

Exercice 59. : Soit $T \in]0;+\infty[$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

1. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$. Montrer que f est constante.

2. On suppose que $\lim\limits_{-\infty} f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$. Est-elle constante ?

3. En déduire que la fonction sin n'a de limite ni en $-\infty$ ni en $+\infty$.

Exercice 60. : Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(kx) = f(x)$.

1. On suppose que f est continue en 0 et que $k \in]0;1[$. Montrer que f est constante.

2. On suppose que f est continue en 0 et que $k \in]1;+\infty[$. Est-elle constante ?

Exercice 61. : On **admet** que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}(r)$ la proposition

$$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(rx) = rf(x)\big)\,.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax$. Vérifier que g satisfait les conditions imposées à f.

2. Montrer que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies. Montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En déduire que $\mathcal{P}(-1)$ est vraie.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

4. Montrer que, pour $q \in \mathbb{Z}^*$, $\mathcal{P}(1/q)$ est vraie.

5. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{P}(r)$ est vraie.

6. On suppose f continue. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}(r)$ est vraie. En déduire que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = y \cdot f(1)$.

7. On suppose que f est continue en un point quelconque $a \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

8. On suppose qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$, tel que f est majorée sur $[a;b]$. Montrer que f est continue en 0.

Exercice 62. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) + (f(0) - f(1)) \cdot x - f(0)$. On va montrer que g est nulle c'est-à-dire que f est une fonction affine.

1. Calculer $g(0)$ et $g(1)$. Montrer que
$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

2. Montrer que g est impaire.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0;2^n]\!]$, $g(k/2^n) = 0$.

4. Soit $D := \{k/2^n;\ n \in \mathbb{N}\,\text{et}\,k \in [\![0;2^n]\!]\} \subset [0;1]$. Soit $x \in [0;1]$. Montrer que x est limite d'une suite d'éléments de D.

5. En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) = 0$.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;n]$, $g(x) = 0$.

7. Conclure.