Régularité du flot.

Exercice 66. : Soit $(F, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}(F)$ l'algèbre sur $\mathbb{K}'$ des applications $\mathbb{K}'$-linéaires continues sur F muni de la norme $\|\cdot\|_0$ de l'exercice 14. Soit $A \in \mathcal{L}$ et $b : \mathbb{R} \longrightarrow F$ une application continue. Soit (E) l'équation différentielle linéaire d'inconnue $Y : I \longrightarrow F$ donnée par, pour tout $t \in I$, $Y'(t) = A \cdot Y(t) + b(t)$. Soit (E_0) l'équation sans second membre associée.

1. Expliciter le flot $\Phi_0 : I^2 \times F \longrightarrow F$ défini par $\Phi_0(t; \tau; Y_0) = \varphi_{(\tau;Y_0;0)}(t)$, où $\varphi_{(\tau;Y_0;0)}$ est la solution maximale de (E_0) valant Y_0 à $t = \tau$.
2. Vérifier que Φ_0 est de classe C^∞.
3. Expliciter le flot $\Phi : I^2 \times F \longrightarrow F$ défini par $\Phi(t; \tau; Y_0) = \varphi_{(\tau;Y_0)}(t)$, où $\varphi_{(\tau;Y_0)}$ est la solution maximale de (E) valant Y_0 à $t = \tau$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que Φ est de classe C^{k+1}, si b est de classe C^k.

Remarque :
Comme l'application $f_0 : \mathbb{R} \times F \longrightarrow F$ donnée par $f_0(t, X) = A \cdot X$ est de classe C^∞, le résultat du cours sur la régularité des flots redonne que Φ_0 est de classe C^∞.
Comme l'application $f : \mathbb{R} \times F \longrightarrow F$ donnée par $f(t, X) = A \cdot X + b(t)$ est de classe C^k si b est de classe C^k, le résultat du cours sur la régularité des flots prouve que Φ est de classe C^k.

Exercice 67. : On reprend le cadre de l'exercice 50 en le plaçant dans le cadre du paragraphe du cours sur la régularité du flot pour une famille d'équations différentielles dépendantes d'un paramètre. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(t; x; b) = (b - 2t)x^2$. On note par (E_b) l'équation différentielle d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall t \in I\,, \quad y'(t) \;=\; f(t; y(t); b)\,.$$

Soit Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$\Omega \;=\; \left\{(t; \tau; c; b) \in \mathbb{R}^4\,; \quad t \in J_{(\tau;c;b)}\right\}\,,$$

où, pour tout $(t; \tau; c; b) \in \mathbb{R}^4$, $J_{(\tau;c;b)}$ est l'intervalle ouvert de définition de la solution maximale $\varphi_{(\tau;c;b)}$ de l'équation (E_b) valant c à $t = \tau$. Soit $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par $\Phi(t; \tau; c; b) = \varphi_{(\tau;c;b)}(t)$.

1. Montrer que f est C^1.

2. Soit $(b_0; c_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que $b_0^2 - 4c_0^{-1} < 0$. Soit $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (E_{b_0}) valant c_0 à $t = 0$. Soit $t_- < 0 < t_+$ et $\epsilon > 0$. Trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $(b; c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|b - b_0| < \delta$ et $|c - c_0| < \delta$, on ait

$$\sup_{t \in [t_-; t_+]} \big|\alpha(t) - \beta(t)\big| < \epsilon ,$$

où β est la solution maximale de (E_b) valant c à $t = 0$.

3. Soit $(b_0; c_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{-*}$. Soit

$$J_0 = \left] \frac{b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4c_0^{-1}}}{2} ; \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4c_0^{-1}}}{2} \right[$$

Soit $\alpha : J_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (E_{b_0}) valant c_0 à $t = 0$. Soit $\inf J_0 < t_- < 0 < t_+ < \sup J_0$ et $\epsilon > 0$. Trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $(b; c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|b - b_0| < \delta$ et $|c - c_0| < \delta$, on ait

$$\sup_{t \in [t_-; t_+]} \big|\alpha(t) - \beta(t)\big| < \epsilon ,$$

où β est la solution maximale de (E_b) valant c à $t = 0$.

4. Soit $(b_0; c_0) \in \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que $b_0^2 - 4c_0^{-1} > 0$. Soit

$$J_0 = \left] \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4c_0^{-1}}}{2} ; +\infty \right[$$

Soit $\alpha : J_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (E_{b_0}) valant c_0 à $t = 0$. Soit $\inf J_0 < t_- < 0 < t_+$ et $\epsilon > 0$. Trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $(b; c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|b - b_0| < \delta$ et $|c - c_0| < \delta$, on ait

$$\sup_{t \in [t_-; t_+]} \big|\alpha(t) - \beta(t)\big| < \epsilon ,$$

où β est la solution maximale de (E_b) valant c à $t = 0$.

5. Soit $(b_0; c_0) \in \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que $b_0^2 - 4c_0^{-1} = 0$. Soit $J_0 =]b/2; +\infty[$. Soit $\alpha : J_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (E_{b_0}) valant c_0 à $t = 0$. Soit $\inf J_0 < t_- < 0 < t_+$ et $\epsilon > 0$. Trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $(b; c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|b - b_0| < \delta$ et $|c - c_0| < \delta$, on ait

$$\sup_{t \in [t_-; t_+]} \big|\alpha(t) - \beta(t)\big| < \epsilon ,$$

où β est la solution maximale de (E_b) valant c à $t = 0$.

6. Soit $(b_0; c_0) \in \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que $b_0^2 - 4c_0^{-1} > 0$. Soit

$$J_0 = \left] \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4c_0^{-1}}}{2} ; +\infty \right[$$

Soit $\alpha : J_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (E_{b_0}) valant c_0 à $t = 0$. Soit $\inf J_0 < t_- < 0 < t_+$ et $\epsilon > 0$. Trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $(b; c; \tau) \in \mathbb{R}^3$ tel que $|b - b_0| < \delta$, $|c - c_0| < \delta$ et $|\tau| < \delta$, on ait

$$\sup_{t \in [t_-; t_+]} \big|\alpha(t) - \beta(t)\big| < \epsilon ,$$

où β est la solution maximale de (E_b) valant c à $t = \tau$.

7. Montrer que, pour $(t; \tau; c; b) \in \Omega$,

$$\Phi(t; \tau; c; b) = \Big(\big(t - b/2\big)^2 - \big(\tau - b/2\big)^2 + c^{-1}\Big)^{-1} .$$

8. Soit $(t_0; \tau_0; c_0; b_0) \in \Omega$. Montrer que la dérivée partielle $\partial_b \Phi$ de Φ par rapport à la deuxième variable existe en $(t_0; \tau_0; c_0; b_0)$.

9. Soit $(t_0; \tau_0; c_0; b_0) \in \Omega$. Montrer que la dérivée partielle $\partial_c \Phi$ de Φ par rapport à la troisième variable existe en $(t_0; \tau_0; c_0; b_0)$.

10. Soit $(t_0; \tau_0; c_0; b_0) \in \Omega$. Montrer que la dérivée partielle $\partial_\tau \Phi$ de Φ par rapport à la quatrième variable existe en $(t_0; \tau_0; c_0; b_0)$.

11. Donner une expression de $\partial_c \Phi$ en fonction de Φ. Même chose pour $\partial_\tau \Phi$ et pour $\partial_b \Phi$.

Remarque :
Dans les questions 2-6, l'existence du δ est garantie par un corollaire du cours qui implique la continuité du flot Φ.
La propriété du 1 et le cours permettent d'affirmer que le flot Φ est de classe C^1, ce qui implique l'existence et la continuité des dérivées partielles mentionnées aux points 7-9.