Fonctions réciproques.

Exercice 75. : On **admet** que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée cosinus. On **admet** que cosinus est positive sur $[-\pi/2;\pi/2]$ et strictement positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$. On **admet** que $\sin^2+\cos^2=1$ et que $\cos(-\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$.

1. Justifier que sinus est bijective de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $\sin([-\pi/2;\pi/2])$, l'image de $[-\pi/2;\pi/2]$ par sinus, et que sa bijection réciproque $g:\sin([-\pi/2;\pi/2])\longrightarrow[-\pi/2;\pi/2]$ est continue.
2. Déterminer $\sin([-\pi/2;\pi/2])$. Justifier toute réponse.
3. Déterminer un intervalle $J\subset\sin([-\pi/2;\pi/2])$ sur lequel g est dérivable. Donner explicitement g' sur cet intervalle.

Exercice 76. : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

1. Vérifier que f n'est pas injective.
2. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $g(\mathbb{R}^+)$, l'image par g de $\mathbb{R}^+$, et que sa bijection réciproque $g^{\langle -1\rangle}:g(\mathbb{R}^+)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ est continue.
3. Déterminer $g(\mathbb{R}^+)$. Justifier toute réponse.
4. Déterminer un intervalle $J\subset g(\mathbb{R}^+)$ sur lequel $g^{\langle -1\rangle}$ est dérivable. Donner explicitement la dérivée $(g^{\langle -1\rangle})'$ de $g^{\langle -1\rangle}$ sur cet intervalle.

Exercice 77. : On **admet** que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, que $\sin'=\cos$, que $\cos'=-\sin$, que cosinus est positive sur $[-\pi/2;\pi/2]$, que cosinus est strictement positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$, que $\cos(-\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$ et que $\sin^2+\cos^2=1$. Soit $f:]-\pi/2;\pi/2[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par, pour $x\in]-\pi/2;\pi/2[$, $f(x)=\sin(x)/\cos(x)$.

1. Montrer que f est bijective de $]-\pi/2;\pi/2[$ sur $f(]-\pi/2;\pi/2[)$, l'image par f de $]-\pi/2;\pi/2[$, et que sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle}:f(]-\pi/2;\pi/2[)\longrightarrow]-\pi/2;\pi/2[$ est continue.
2. Déterminer $f(]-\pi/2;\pi/2[)$. Justifier toute réponse.
3. Déterminer un intervalle $J\subset f(]-\pi/2;\pi/2[)$ sur lequel $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable. Donner explicitement la dérivée $(f^{\langle -1\rangle})'$ de $f^{\langle -1\rangle}$ sur cet intervalle.

Exercice 78. : Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^3/3+x^2/2+x+1$, est bijective.