Équations différentielles autonomes.

Exercice 68. : Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $z : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $z' = 1 - (1 + z^2)^{-1}$. On a vu, dans l'exercice 48, que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à cette équation et, dans l'exercice 60, que toutes ses solutions maximales sont globales. Que peut-on dire des limites en $-\infty$ et $+\infty$ de ces solutions maximales ? L'équation admet-elle des solutions périodiques ?

Exercice 69. : Soit A, B deux applications linéaires sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donnée par, respectivement,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique aux équations différentielles associées à A et B, respectivement.
On note par $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$.

1. Vérifier que les trajectoires de l'équation différentielle associée au champ de vecteur A sont toutes périodiques.
2. Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ et $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la solution maximale de l'équation différentielle associée à B valant Y_0 à $t = 0$.
   a). Pour quelles valeurs de Y_0, $\lim\limits_{+\infty} Y$ existe dans $\mathbb{R}^2$? Pour une telle valeur de Y_0, que vaut $\lim\limits_{+\infty} Y$ et que peut-on dire de $\lim\limits_{-\infty} \|Y\|$?
   b). Pour quelles valeurs de Y_0, $\lim\limits_{-\infty} Y$ existe dans $\mathbb{R}^2$? Pour une telle valeur de Y_0, que vaut $\lim\limits_{-\infty} Y$ et que peut-on dire de $\lim\limits_{+\infty} \|Y\|$?
   c). Montrer que Y est injective.

Exercice 70. : Soit (E) l'équation différentielle autonome d'inconnue $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$) donnée par, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{-y(t)\sqrt{3}\cdot(1+z(t)^2)}{1+x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2} \\ y'(t) &= \frac{x(t)\cdot(1+z(t)^2)}{1+x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2} \\ z'(t) &= 0\,, \end{aligned}$$

où $(x(t);y(t);z(t))$ sont les coordonnées de $Y(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E).

2. Montrer que les deux fonctions suivantes sont des intégrales premières du champ de vecteurs p qui définit (E) : $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ données par $f(u; v; w) = u^2 + 3v^2$ et $g(u; v; w) = w$.

3. En déduire que toutes les solutions maximales de (E) sont globales.

4. Déterminer toutes les trajectoires ponctuelles.

5. Soit $Y_0 = (x_0; y_0; z_0) \in \mathbb{R}^3$ avec $(x_0; y_0) \neq (0; 0)$ et $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la solution maximale de (E) valant Y_0 à $t = 0$. On va montrer que Y est périodique et déterminer la trajectoire de Y_0.
Pour $c \in \mathbb{C}$, on note sa partie réelle (resp. imaginaire) par $\Re(c)$ (resp. $\Im(c)$). On identifie $\mathbb{R}^-$ à la partie $\{x + 0i; x \in \mathbb{R}^-\}$ de $\mathbb{C}$.
On admet qu'il existe une fonction $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \longrightarrow]-\pi; \pi[$ de classe C^1 telle que, pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $c = |c| \exp(i\mathrm{Arg}(c))$ et

$$\frac{\partial Arg}{\partial \Re(c)}(c) \;=\; -\frac{\Im(c)}{|c|^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Arg}{\partial \Im(c)}(c) \;=\; \frac{\Re(c)}{|c|^2}\,.$$

On pose $\omega_0 = x_0 + iy_0\sqrt{3}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\omega(t) = \omega_0^{-1}(x(t) + iy(t)\sqrt{3})$.

   a). Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\omega(t)| = 1$. Vérifier que la fonction $\mathrm{Arg} \circ \omega$ est définie sur un voisinage de 0.

   b). Soit $t_+ = \sup\{t \in \mathbb{R}^+; \mathrm{Arg} \circ \omega \text{ est définie sur } [0; t[\}$. Montrer que $\mathrm{Arg} \circ \omega$ est définie sur $[0; t_+[$ et qu'elle y est strictement croissante.

   c). Vérifier que $\ell_+ = \lim\limits_{t_+} \mathrm{Arg} \circ \omega$ existe dans $[0; \pi]$. Montrer que $t_+ < +\infty$.

   d). On suppose que $\ell_+ < \pi$. Vérifier que $\mathrm{Arg}(\omega(t_+))$ est bien défini et vaut ℓ_+. En déduire une contradiction avec la définition de t_+.
   Donc $\ell_+ = \pi$. De même on montrerait l'existence d'un $t_- \in \mathbb{R}^-$ tel que $\mathrm{Arg} \circ \omega$ est définie sur $]t_-; 0]$ et $-\pi = \lim\limits_{t_-} \mathrm{Arg} \circ \omega$.

   e). Montrer que $Y(t_-) = Y(t_+)$. Montrer que Y est périodique.

   f). Montrer que la trajectoire de Y est l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(Y_0) \;&=\; \big\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 3y^2 \;=\; x_0^2 + 3y_0^2 \text{ et } z \;=\; z_0\big\} \\ &=\; f^{-1}\big(f(Y_0)\big) \cap g^{-1}\big(g(Y_0)\big)\,. \end{aligned}$$

Exercice 71. : Pour $c \in \mathbb{C}$, on note par $\overline{c}$ (resp. $\Re c$, resp. $\Im c$) le conjugué (resp. la partie réelle, resp. la partie imaginaire) de c. On identifie $\mathbb{R}$ à la partie $\{x + 0i; x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$.
On considère l'équation différentielle (C), donnée par $y' = v(y)$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{C}$ (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$), associée au champ de vecteurs $v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 qui, à $z \in \mathbb{C}$, associe $v(z) = (z - \overline{z})z$.

1. Montrer que v est de classe C^1.

2. Montrer que la fonction “module” $|\cdot|$ est une intégrale première du champ v.

3. Montrer que le champ v est complet.

4. Vérifier que $\{z \in \mathbb{C}; v(z) = 0\} = \mathbb{R}$.

5. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la partie imaginaire $\Im z_0$ de z_0 est non nulle. Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la solution maximale de (C) valant z_0 à $t = 0$.

   a). Montrer que la fonction $\Im\gamma$ a partout le même signe strict que $\Im z_0$, c'est-à-dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\Im\gamma)(t) \cdot (\Im z_0) > 0$.

   b). Montrer que la fonction $\Re\gamma$ est strictement décroissante.

   c). En déduire que la trajectoire $\mathcal{C}(z_0)$ de z_0 est égale à l'ensemble

$$\mathcal{L}(z_0) \ = \ \Big\{z \in \mathbb{C}; (\Im z) \cdot (\Im z_0) > 0\Big\} \cap \Big\{z \in \mathbb{C}; |z| = |z_0|\Big\} \,.$$

Exercice 72. : Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 telle que, $f > 0$ sur $[0;1[$, $f < 0$ sur $]1;+\infty[$ et $f(1) = 0$. Soit $v_f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$v_f(z) \ = \ \Big(f\big(|z|^2\big) \ + \ i\Big)\, z \,.$$

On note par (E) l'équation différentielle autonome associée à v_f. On considère aussi l'équation différentielle (E'), d'inconnue $u : J_u \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$\forall t \in J_u \,, \quad u'(t) \ = \ 2f\big(u(t)\big)u(t) \,.$$

1. Vérifier que v_f est de classe C^1.
   En particulier (E) vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2. Montrer que (E') vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

3. Montrer que les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sur $\mathbb{R}$ sont les seules solutions maximales constantes de (E').

4. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^+$. Soit $\alpha : J_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (E') valant u_0 à $t = 0$.

   a). On suppose que $0 < u_0 < 1$. Montrer que, pour tout $t \in J_\alpha$, $0 < \alpha(t) < 1$. En déduire que $J_\alpha = \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \alpha = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \alpha = 1$.

   b). On suppose $u_0 > 1$. Montrer que, pour tout $t \in J_\alpha$, $\alpha(t) > 1$. En déduire que $\sup J_\alpha = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} \alpha = 1$.

5. Montrer que v_f ne s'annule qu'en 0.

6. Soit $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$. Soit $\omega : J_\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (E) valant ω_0 à $t = 0$.

a). Montrer que, pour tout $t \in J_\omega$, $\omega(t) \neq 0$.

b). Vérifier que la fonction $|\omega|^{-1}\omega$ est solution sur J_ω d'une équation différentielle linéaire. En donner une expression explicite en fonction de ω_0.

c). Vérifier que la fonction $|\omega|^2$ est solution sur J_ω de (E').

d). On suppose que $0 < |\omega_0| < 1$. Montrer que $J_\omega = \mathbb{R}$. Dessiner la trajectoire de ω en indiquant le sens de parcours (lorsque t croît). Que peut-on dire de la limite $\lim\limits_{-\infty} \omega$?

e). On suppose $\omega_0 > 1$. Montrer que $\sup J_\omega = +\infty$. Dessiner la trajectoire de $\omega_{|\mathbb{R}^+}$ en indiquant le sens de parcours (lorsque t croît).

7. Montrer que les seules trajectoires périodiques de (E) sont le cercle unité de $\mathbb{C}$ centré en 0 et le singleton $\{0\}$.

Exercice 73. : Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 telle que, $f > 0$ sur $[0;1[$, $f < 0$ sur $]1;+\infty[$ et $f(1) = 0$. On suppose de plus que f^{-2} est intégrable près de 1. Soit $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ et $w_f : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ donnée par

$$w_f(z;s) \;=\; \left(v_f(z)\,;\, \frac{s}{f(|z|^2)}\right),$$

où v_f est le champ de vecteur de l'exercice 72.

1. Vérifier que w_f est de classe C^1.
   En particulier le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (F) associée au champ w_f.

2. Montrer que w_f ne s'annule qu'en $(0;0)$.

3. Soit $(\omega_0;\rho_0) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ et $y = (\omega;\rho) : J_0 \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ la solution maximale de (F) valant $(\omega_0;\rho_0)$ à $t = 0$.

a). Déterminer explicitement y en fonction de f et ρ_0, lorsque $\omega_0 = 0$.

b). Déterminer y en fonction d'une solution maximale de v_f lorsque $\rho_0 = 0$.

c). On suppose que $0 < |\omega_0| < 1$ et que $\rho_0 \neq 0$. Montrer que ω est la restriction à J_0 d'une solution maximale $\tilde{\omega}$ de v_f et que

$$\forall t \in J_0\,, \quad \rho(t) \;=\; \rho_0 \cdot \exp\left(\int_0^t \frac{du}{f\big(|\omega(u)|^2\big)}\right). \qquad (31)$$

En déduire que $y = (\tilde{\omega};\tilde{\rho})$, où la fonction $\tilde{\rho}$ est donnée sur $\mathbb{R}$ par (31) avec ω remplacée par $\tilde{\omega}$.

d). Toujours dans le cas $0 < |\omega_0| < 1$, que peut-on dire de la limite $\lim\limits_{-\infty} y$? et de la limite $\lim\limits_{+\infty}(|\tilde{\omega}|;\tilde{\rho})$?