Ensembles limites.

Exercice 74. : On se place dans le cadre des exercices 72 et 73.

1. Soit $\omega_0 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\omega_0| < 1$. Déterminer $L^+(\omega_0)$ pour l'équation (E) de l'exercice 72.
(Indication : on a montré dans le cours que le cercle unité centré en $(0;0)$ est inclu dans $L^+(\omega_0)$.)

2. Soit $\omega_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega_0| > 1$. Déterminer $L^+(\omega_0)$ pour l'équation (E) de l'exercice 72.
(Indication : on a montré dans le cours que le cercle unité centré en $(0;0)$ est inclu dans $L^+(\omega_0)$.)

3. Soit $\omega_0 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\omega_0| < 1$ et $\rho_0 > 0$. Déterminer $L^+(\omega_0)$ pour l'équation (F) de l'exercice 73.
(Indication : une partie du travail a été fait dans le cours.)

Exercice 75. : Soit A, B deux applications linéaires sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donnée par, respectivement,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire s'applique aux équations différentielles (E_A) et (E_B) associées à A et B, respectivement.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante de classe C^1 telle que

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 & \text{si} \quad x \leq 1 , \\ \varphi(x) = 0 & \text{si} \quad x \geq 2 , \\ 0 < \varphi(x) < 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 . \end{cases}$$

On **admet** l'existence d'une telle fonction φ.
On note par $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(X) = \varphi\big(\|X\|\big)AX + \Big(1 - \varphi\big(\|X\|\big)\Big)BX .$$

Soit (E_f) l'équation différentielle autonome associée à f.

1. Déterminer explicitement la solution maximale Y_1 de (E_A) valant $(1;0)$ à $t = 0$.

2. Déterminer explicitement les solutions maximales Y_2 et Y_3 de (E_B) valant, respectivement, $(2^{-1/2}; 2^{-1/2})$ et $(2; 2)$ à $t = 0$.

3. Soit Y_4 la solution maximale de (E_B) valant $(3; 0)$ à $t = 0$. Montrer qu'il existe $t_2 \in]-\infty; 0[$ tel que, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$\|Y_4(t)\| \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad t \geq t_2 .$$

4. Montrer que f est de classe C^1 et que sa différentielle Df est bornée.
   En particulier, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation (E_f).

5. Montrer que le champ de vecteurs f est complet.

6. Montrer que $f(X) = 0$ si et seulement si $X \in \mathrm{Ker}B$ et ($\|X\| \geq 2$ ou $X = 0$).

7. Pour $j \in \{1; 2; 3\}$, déterminer si Y_j est une solution maximale de (E_f).

8. Soit Y une solution maximale de (E_f). Montrer que $\|Y\|$ est croissante.

9. Soit Z la solution maximale de (E_f) valant $Z_0 := (3; 0)$ à $t = 0$. Montrer que, sur l'intervalle $[t_2; +\infty[$, Z est égale à Y_4. En déduire que, pour $t < t_2$, $\|Z(t)\| < 2$.

10. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \|Z\|$ existe et qu'elle appartient à $[1; 2[$.

11. Montrer que $\lim\limits_{-\infty} Z$ n'existe pas.

12. Montrer que l'ensemble limite $L^-(Z_0)$ pour l'équation (E_f) est un compact non vide qui ne contient aucun point d'équilibre de f.
    Par le théorème de Poincaré-Bendixon, $L^-(Z_0)$ est donc une trajectoire périodique non ponctuelle de f.

13. Montrer que $L^-(Z_0)$ est inclu dans le cercle de centre $(0; 0)$ et de rayon $\lim\limits_{-\infty} \|Z\|$. En déduire que $\lim\limits_{-\infty} \|Z\| = 1$. Déterminer $L^-(Z_0)$.

Exercice 76. : On note par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Soit $a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $a(x; y) = 1 - (x^2 + y^2)$. Soit $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs donné par
$$w(x; y; z) \;=\; \big(a(x; y)x - y\,;\, x + a(x; y)y\,;\, -(1 + a(x; y))z\big) .$$
Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $Z : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $Z' = w(Z)$. On verra que w est C^1. Pour toute solution maximale $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de (E), on pose $b = \sup J$ et on note
$$\begin{array}{rccl} Y : & J & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & Y(t) = \big(x(t); y(t); z(t)\big) . \end{array}$$
Soit (U) l'équation différentielle d'inconnue $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, donnée par $u' = 2(u - 1)u$.

1. Montrer que w est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.
   En particulier, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

2. Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (U) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Soit $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (E). Montrer que la fonction $\varphi : J \ni t \mapsto a(x(t); y(t))$ est solution de l'équation (U).

4. Soit $\sigma \in \{0; 1\}$ et $t_1 \in \mathbb{R}$. Déterminer explicitement la solution maximale u_σ de l'équation (U) vérifiant $u_\sigma(t_1) = \sigma$.

5. Soit $Y_0 = (x_0; y_0; z_0) \in \mathbb{R}^3$ avec $a(x_0; y_0) = 0$. Soit $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la solution maximale de (E) valant Y_0 à $t = 0$.

   a). Montrer que, pour tout $t \in J$, $a(x(t); y(t)) = 0$.

   b). Déterminer explicitement Y.

   c). On suppose, de plus, que $z_0 = 0$. Déterminer explicitement la trajectoire $\mathcal{C}(Y_0)$ de Y_0.

6. Soit $Y_1 = (x_1; y_1; z_1) \in \mathbb{R}^3$ avec $0 < a(x_1; y_1) < 1$ et $z_1 > 0$. Soit $Y : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la solution maximale de (E) valant Y_1 à $t = 0$.

   a). Montrer que, pour tout $t \in J$, $0 < a(x(t); y(t)) < 1$ et $z(t) > 0$. Montrer que, pour $t \in J \cap \mathbb{R}^+$, $z(t) \leq z_1$.

   b). En déduire que $b := \sup J = +\infty$.

   c). Vérifier que la limite
   $$\lim_{t \to +\infty} a\big(x(t); y(t)\big)$$
   existe et vaut 0.
   (Indication : on pourra utiliser l'équation (U).)

   d). En déduire que
   $$\lim_{t \to +\infty} z(t) \;=\; 0\,.$$

   e). Montrer que $L^+(Y_1)$ est non vide.

   f). Montrer qu'il existe un $Y_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $L^+(Y_1) \subset \mathcal{C}(Y_0)$, où $\mathcal{C}(Y_0)$ désigne la trajectoire de Y_0.

   g). En déduire que $L^+(Y_1) = \mathcal{C}(Y_0)$.