Rappels de calcul différentiel et topologie

Thierry Jecko - Paul Boureau

1. Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (Dérivation partielle)

1.1. Rappel sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.1. *L'espace $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ muni de l'addition*

$$+ : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ ((x,y),(x',y')) & \mapsto (x+x', y+y') \end{cases}$$

et du produit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \mapsto xx' + yy' \end{cases}$$

est un espace euclidien.

Corollaire 1.2. *L'application*

$$|| \cdot ||: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \langle (x,y),(x,y) \rangle = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

1.2. Rappels sur la dérivation.

Définition 1.3. Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application et a un point intérieur à I. On dit que f est dérivable en a si la fonction définie au voisinage de a par $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie en a, dans ce cas on note $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Proposition 1.4.
- *Si f est dérivable en a alors il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a et telle que*
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$
- *Si il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a et un réel α tels que*
$$f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$
alors f est dérivable en a et $f'(a) = \alpha$.

1.3. Dérivées partielles.

Définition 1.5. Soient Ω une partie de $\mathbb{R}^2$ et

$$f : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto f(x,y) \end{cases}$$

une application.

Cette fonction induit, pour tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction réelle partielle

$$f_b^d : x \mapsto f(x,b).$$

Si f_b^d est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, on dit que f possède une dérivée partielle par rapport à la première variable en (a,b) et on note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \left(f_b^d\right)'(a).$$

De même, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$f_a^g : y \mapsto f(a,y).$$

Si f_a^g est dérivable en $b \in \mathbb{R}$, on dit que f possède une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en (a, b) et on note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (f_a^g)'(b).$$

Exercice 1.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 y + 3xy^2.$$

(1) Calculer la dérivée partielle de f par rapport à x en un point (a, b) en utilisant $f_b^d(x) = f(x, b)$.
(2) Calculer la dérivée partielle de f par rapport à y en un point (a, b) en utilisant $f_a^g(y) = f(a, y)$.

Solution. (1) On fixe $b \in \mathbb{R}$:

$$f_b^d(x) = f(x, b) = x^2 b + 3xb^2.$$

f_b^d est polynomiale donc dérivable et pour tout x,

$$(f_b^d)'(x) = 2xb + 3b^2,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = (f_b^d)'(a) = 2ab + 3b^2.$$

(2) On fixe $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a^g(y) = f(a, y) = a^2 y + 3ay^2.$$

f_a^g est polynomiale donc dérivable et pour tout x,

$$(f_a^g)'(y) = a^2 + 6ay,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (f_a^g)'(b) = a^2 + 6ab.$$

$\square$

Exercice 1.7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(1) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ à l'aide de f_b^d.
(2) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ à l'aide de f_a^g.
(3) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ à partir des fonctions partielles.

Solution. (1) Fixons $b \in \mathbb{R}$ et considérons, pour $x \neq 0$ ou $b \neq 0$,

$$f_b^d(x) = f(x, b) = \frac{x^2 b}{x^2 + b^2}.$$

C'est une fonction d'une variable dérivable, et par la règle du quotient

$$\left(f_b^d\right)'(x) = \frac{(2xb)(x^2 + b^2) - (x^2 b)(2x)}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{2xb^3}{(x^2 + b^2)^2}.$$

Donc, pour $(x, y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x\, y^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(2) Fixons $a \in \mathbb{R}$ et considérons, pour $y \neq 0$ ou $a \neq 0$,

$$f_a^g(y) = f(a, y) = \frac{a^2 y}{a^2 + y^2}.$$

On dérive (quotient) :

$$\left(f_a^g\right)'(y) = \frac{a^2(a^2 + y^2) - (a^2 y)(2y)}{(a^2 + y^2)^2} = \frac{a^4 - a^2 y^2}{(a^2 + y^2)^2} = \frac{a^2(a^2 - y^2)}{(a^2 + y^2)^2}.$$

Ainsi, pour $(x, y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(3) Au point $(0,0)$, on utilise strictement les fonctions partielles. Pour la dérivée partielle en x, on fige $b = 0$:

$$f_0^d(x) = f(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donc f_0^d est identiquement nulle et dérivable en 0 avec $\left(f_0^d\right)'(0) = 0$. Par définition,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(f_0^d\right)'(0) = 0.$$

De même, pour la dérivée partielle en y, on fige $a = 0$:

$$f_0^g(y) = f(0, y) = 0 \quad \text{donc} \quad \left(f_0^g\right)'(0) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

□

1.4. **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.**

Définition 1.8. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f possède des dérivées partielles par rapport à toutes les variables, en tout point de U, et que ces dérivées partielles sont continues sur U.

Proposition 1.9. *Les projections*

$$p_i : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x_i \end{cases}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. La dérivée par rapport à la $i-$ème variable de p_i est égale à 1, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. La dérivée de p_i par rapport à une l'autre variable est égale à 0 qui est aussi continue. □

Proposition 1.10. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soient $\varphi, \psi : U \to \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\varphi + \psi$ et $\varphi\psi$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\varphi(U) \subset I$, et que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exercice 1.11. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \frac{\cos(x^3+e^y)}{1+x^2} \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. D'après le cours, les projections

$$p_i : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto x_i \end{cases}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Les applications $x \mapsto x^3$ est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale et il en découle (par composition dans la proposition précédente) que l'application $(x,y) \mapsto x^3$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. L'application $y \mapsto e^y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par le même raisonnement,$(x,y) \mapsto e^y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par produit et somme (dans la proposition précédente et comme une fonction constante est $\mathcal{C}^1$), l'application $(x,y) \mapsto 1+x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs strictement positives. L'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition, l'application $(x,y) \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Enfin comme l'application $t \mapsto \cos(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par composition et produit, φ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. □

2. Applications linéaires

Proposition 2.1. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Démonstration. Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors $\|x\| = \max |x_i|$ définit une norme sur $E,$ et puisque E est de dimension finie elle est équivalente à $\|\cdot\|_E$. Soit $c > 0$ tel que $\|x\| \le c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$. On a alors

$$\|f(x)\|_F \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\|_F \le \|x\| \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F \le C\|x\|_E$$

avec $C := \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F$, ce qui prouve que f est continue (car lipschitzienne). □

Proposition 2.2. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux$\mathbb{R}-$espaces vectoriels normés. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors on a*

$$\sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E \le 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

et ces quantités sont finies si et seulement si f est continue (ce qui est vrai quand E est de dimension finies). Dans ce cas, on note $|||\ f\ |||$ cette quantité.

Pour deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels E et F, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F.

Proposition 2.3. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie alors l'application*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto |||\ f\ ||| \end{cases}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

3. Différentiabilité

Définition 3.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, F un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé, $f : U \to F$ et $x_0 \in U$. On dit que f est différentiable en x_0 s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall h \in E,\ \|h\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|_F < \varepsilon \|h\|.$$

De façon équivalente, f est différentiable en x_0 s'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \big(f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\big) = 0,$$

ou encore telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(h).$$

Proposition 3.2. *Soit $f : U \to F$ et $x_0 \in U$. Si f est différentiable en x_0 alors l'application L est unique. Elle est appelée différentielle de f en x_0 et est notée $Df(x_0)$, ou encore $df(x_0)$, $d_{x_0}f$ ou $D_{x_0}f$.*

Exercice 3.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Calculer sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2$ en fonction de ses dérivées partielles.

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}^2$,en prenant $h = (h_1, 0)$ on en déduit d'abord que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en a, avec

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = Df(a)(e_1)$$

où $e_1 = (1, 0)$. En faisant la même chose avec $h = (0, h_2)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = Df(a)(e_2)$$

où $e_2 = (0, 1)$ Comme $Df(a)$ est linéaire, on en déduit que pour tout $h = (h_1, h_2)$ on a

$$Df(a)(h) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i,$$

□

Exercice 3.4. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to F$ une application linéaire. Calculer sa différentielle en tout point $a \in \mathbb{R}^2$.

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $h \neq 0$, on a

$$L(a + h) = L(a) + L(h).$$

Il en découle que $DL(a) = f$. C'est ici le cas le plus évident où il n'y a pas de termes correctifs et donc L est sa propre différentielle en tout points. □

Exercice 3.5. Soit $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Calculer sa différentielle en tout point $a \in \mathbb{R}^2$.

Solution. Il existe B une application bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ (sa forme polaire) telle que $Q(x) = B(x, x)$. Il en découle que pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} Q(a + h) &= B(a + h, a + h) \\ &= B(a, a) + 2B(a, h) + B(h, h) \\ &= Q(a) + 2B(a, h) + B(h, h). \end{aligned}$$

Or $B(h,h) = \sum_{1\le i\le j\le 2} b_{ij}\, h_i h_j$ où $(b_{i,j})$ est la matrice de B dans la base canonique, d'où

$$|B(h,h)| \le \left(\sum_{i,j} |b_{ij}|\right) \|h\|^2.$$

Par suite $B(h,h) = O(\|h\|^2)$, a fortiori $B(h,h) = o(\|h\|)$. Il en résulte que f est différentiable en a et que

$$Df(a)h = 2B(a,h).$$

□

Remarque 3.6. L'exercice précédent permet de calculer en tout point de $\mathbb{R}^2$, la différentielle de l'application $x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ qui est une forme quadratique.

Proposition 3.7. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}^2$, définie par*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Alors f est différentiable en $x_0 \in U$ si et seulement si toutes les f_j sont différentiables en x_0 et on a

$$Df(x_0)(h) = \big(Df_1(x_0)(h), Df_2(x_0)(h)\big).$$

Dans ce cas, on a déjà vu que alors pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ et $i = 1, 2$ on a

$$Df_i(x)(h) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) h_j.$$

La différentielle $Df(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donc la matrice

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}},$$

appelée matrice jacobienne *de f au point x.*

Exercice 3.8. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x, -y).$$

(1) Vérifier que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.
(2) Calculer la différentielle $Df(x,y)$ en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(3) Donner la matrice jacobienne de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$.
(4) Interpréter géométriquement l'application linéaire associée.

Solution. (1) La fonction f est polynomiale en les variables (x,y), donc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ en particulier différentiable en tout point.

(2) $Df(x,y)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$Df(x,y)(h_1,h_2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)h_2,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)h_2\right).$$

(3) On a

$$f_1(x,y) = x, \quad f_2(x,y) = -y.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1.$$

Donc la matrice jacobienne est

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) Cette matrice correspond à une symétrie orthogonale par rapport à l'axe (Ox) : f laisse la première coordonnée inchangée et change le signe de la seconde.

$\square$