TD Alg. 2

- Rappel sur la résolution d'équation en prenant un exemple très simple.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'éq. $2x+1=0$.

x est l'inconnue et appartient à $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\mathcal{S}$ des sol. de l'éq. est $\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{R}\,;\,2x+1=0\}$.
On demande d'expliciter $\mathcal{S}$. Autrement dit, on demande de trouver tous les x de $\mathbb{R}$ vérifiant l'éq.

traduction en termes d'ensemble.

$2x+1=0$

$2x=-1$

$x=-\frac{1}{2}$.

Ceci est une très mauvaise rédaction.

ici on suppose implicitement qu'on a une sol. x de l'éq. Par un calcul, on conclut que $x=-\frac{1}{2}$
On a donc montré :

$(x \text{ sol.}) \Rightarrow (x=-\frac{1}{2})$.

cet argument montre que $\mathcal{S}\subset\{-\frac{1}{2}\}$, et pas plus !

En particulier, on ne sait toujours pas si l'éq. a une solution.

Mais, comme

$2\times(-\frac{1}{2})+1=-1+1=0$,

$-\frac{1}{2}$ est solution de l'éq.
On vient de montrer que
$(x=-\frac{1}{2}) \Rightarrow (x \text{ sol.})$

cet argument montre que $\{-\frac{1}{2}\}\subset\mathcal{S}$.

Maintenant, on sait que l'éq. a une unique sol. à savoir $-\frac{1}{2}$.

On a donc $\mathcal{S}=\{-\frac{1}{2}\}$.

2 étapes.
↳ on peut faire ces 2 étapes en même temps en utilisant des équivalences.

Deux rédactions possibles :

* Soit x une sol. de l'ég. Alors $2x+1=0$
donc $2x=-1$ et $x=-\frac{1}{2}$.
De plus, comme $2\times(-\frac{1}{2})+1=-1+1=0$,
$-\frac{1}{2}$ est sol. de l'ég.
Donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des sol. de l'ég. est $\mathcal{S}=\{-\frac{1}{2}\}$.

* Pour $x\in\mathbb{R}$, on a

on a utilisé ici le fait que $2\neq 0$

$2x+1=0 \iff 2x=-1 \iff x=-\frac{1}{2}$.
Donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des sol. de l'ég. est $\mathcal{S}=\{-\frac{1}{2}\}$.

Important : la résolution d'ég. comporte toujours **2** étapes même si, parfois, on peut les faire en même temps.

Retour sur le cours : là aussi, on veut résoudre des équations. On corrige une petite confusion dans le poly.

On se donne un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ et trois fonctions continues $a,b,c : J\to\mathbb{R}$.
À ces données, on associe une équation différentielle sur J de la façon suivante :
* l'inconnue de l'ég. est une fonction dérivable $y : I\to\mathbb{R}$ où I est un sous-intervalle ouvert de J.
* l'ég. est donnée par la condition
$\forall t\in I,\quad a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t)$.

L'éq. diff. associée à a, b et c est notée :

$$ay' + by = c.$$

Ceci est une <u>abréviation</u> de la définition précédente.

<u>Exemple</u> : L'éq. $y' + ty = 0$ sur $\mathbb{R}$ est l'éq. diff. associée aux fonctions continues : $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$.

Une <u>solution</u> de l'éq. $ay' + by = c$ est une fonct. dérivable $y : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert inclu dans J, qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

Pour ce type d'éq. diff., on peut montrer que si $y : I \to \mathbb{R}$ est sol. alors il existe une sol. $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}$ t.q., pour $t \in I$, $\tilde{y}(t) = y(t)$.

Autrement dit, on peut toujours prolonger une sol. de l'éq. en une sol. définie sur J.

Résoudre une éq. $ay' + by + c = 0$ consiste à trouver toutes les sol. de l'éq. qui sont définies <u>sur J</u>.

L'ensemble S des solutions est donc :

$$S = \{ y : J \to \mathbb{R}, \text{ dérivable et t.q. } \forall t \in J,\ a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \}.$$

Il s'agit d'expliciter cet ensemble S.

Que dit le cours au sujet de ces éq. diff. ?

* Il donne une résolution complète pour les éq. diff. "normales", c'est-à-dire lorsque la fonct. a ne s'annule pas.

* Le cas où la fonct. a s'annule est plus compliqué : problème de raccord. Mais le cours aide à la résolution.

Concentrons-nous sur le 1er cas pour $ay'+by=c$ sur J où a ne s'annule pas.

On suppose donc que a ne s'annule pas.

L'éq. (e) : $ay'+by=c$ sur J est équivalente à l'éq. $(\tilde{e})$: $y'+\tilde{b}y=\tilde{c}$ où $\tilde{b}=\frac{b}{a}$ et $\tilde{c}=\frac{c}{a}$.

En effet, si $y : J \to \mathbb{R}$ est sol. de (e) alors, on a pour tout $t\in J$,

$$a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t)$$

et, comme $a(t)\neq 0$, on a

$$y'(t)+\frac{b(t)}{a(t)}y(t)=\frac{c(t)}{a(t)}.$$

Donc y est sol. de $(\tilde{e})$.

Réciproquement, si y est sol. de $(\tilde{e})$ sur J alors, pour $t\in J$,

$$y'(t)+\tilde{b}(t)y(t)=\tilde{c}(t)$$

donc,

$$a(t)y'(t)+a(t)\tilde{b}(t)y(t)=a(t)\tilde{c}(t)$$

soit

$$a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t).$$

Donc y est sol. de (e) sur J.

On est donc ramené à résoudre l'éq. normalisée $(\tilde{e})$. Pour ce faire, 3 résultats permettent de déterminer $\tilde{S}$, l'ens. des sol. de $(\tilde{e})$, qui est aussi l'ens. des sol. de (e).

* on introduit l'éq. homogène $(\tilde{e}_0)$ associée à $(\tilde{e})$:

$$y' + \tilde{b}y = 0$$

et on note par $\tilde{S}_0$ l'ens. des sol. de $(\tilde{e}_0)$.

* L'ens. $\tilde{S}_0$ est la droite vectorielle

$$\{ky_0 ; k \in \mathbb{R}\} \text{ où } y_0 : J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto e^{-B(t)}$$

avec $B : J \to \mathbb{R}$ une primitive de $\tilde{b}$. (cf. Th. 1.1.2.2)

* Par la méthode de "variation des constantes" (cf. Th. 1.1.5.1), on sait construire une sol. y_P de $(\tilde{e})$.

* On a $\tilde{S} = \{y_P + y ; y \in \tilde{S}_0\}$ (cf. Th. 1.1.4.1).

où y_P est une sol. de $(\tilde{e})$.

Dans la pratique, il suffit de suivre la démarche précédente en faisant le calcul explicite des solutions.

✓