Ex. 3.3.

Prop. : pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

De même, pour $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}.$$

(i). On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n = (X+1)^n - (X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \left(1 - (-1)^{n-k}\right)$$

$$= \binom{n}{n} X^n \left(1 - (-1)^{n-n}\right) + \binom{n}{n-1} X^{n-1} \left(1 - (-1)^{n-(n-1)}\right) + R_n$$

où $\deg R_n < n-1$.

$$= 0 + \underbrace{n X^{n-1} \times 2}_{\text{terme dominant de } P_n \text{ et } \deg P_n = n-1.} + R_n$$

On a :

$$Q_n = (X+1)^{2n} - (X^2+1)^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{\ell} (X^2)^\ell$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} X^{2\ell}.$$

(ici on n'a que des puissances paires.)

Donc

$$Q_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \binom{2n}{k} X^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} X^{2\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n}{2\ell} X^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} X^{2\ell+1} - \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} X^{2\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \left(\binom{2n}{2\ell} - \binom{n}{\ell} \right) X^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{2n}{2\ell+1} X^{2\ell+1}$$

$$= \left(\binom{2n}{2n} - \binom{n}{n} \right) X^{2n} + S_n + \binom{2n}{2n-1} X^{2n-1}$$

où $\deg S_n < 2n-1$.

$$= 0 + S_n + \underbrace{2n X^{2n-1}}_{\text{terme dominant de } Q_n}$$

et $\deg Q_n = 2n-1$.

<u>Division euclidienne</u> : cours.

Pour $(A;B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$, il existe un <u>unique</u> $(Q;R) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q.

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \text{et} \\ \deg R < \deg B. \end{cases}$$

c'est la division euclidienne de A par B ; Q est le quotient et R est le reste.

Rq : Si $\deg A < \deg B$ alors

$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quotient}}}{0} \cdot B + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{reste}}}{A}$ est la division eucli. de A par B.

Exemples :

$$X+\pi \quad \big|\ X^2-1$$
$$0 \leftarrow \text{quotient}$$
$$X+\pi \uparrow \text{reste}$$

$$\begin{array}{l|l} X+\pi & X-\pi \\ -(X-\pi) & 1 \leftarrow \text{quotient} \\ \hline 2\pi \uparrow \text{reste} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^2+i & iX-1 \\ -(X^2+iX) & -iX-1 \uparrow \text{quotient} \\ \hline -iX+i & \\ -(-iX+1) & \\ \hline i-1 \leftarrow \text{reste} & \end{array}$$

Rq. : c'est similaire à la division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{l|l} 3 & 7 \\ 3 \uparrow \text{reste} & 0 \uparrow \text{quotien} \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 15 & 7 \\ -14 & 2 \leftarrow \text{quotient} \\ \hline 1 \leftarrow \text{reste} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 20'33 & 5 \\ -20 & 406 \uparrow \text{quotient.} \\ \hline 0\,33 & \\ -30 & \\ \hline 3 \leftarrow \text{reste} & \end{array}$$

Ex 3.10.

$$\begin{array}{l|l} X^3+3X^2+2X-1 & X^2-X-1 \\ -(X^3-X^2-X) & X+4 \uparrow \text{quotient} \\ \hline 4X^2+3X-1 & \\ -(4X^2-4X-4) & \\ \hline 7X+3 \leftarrow \text{reste} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^4-X^3+X-2 & X^2-2X+4 \\ -(X^4-2X^3+4X^2) & X^2+X-2 \\ \hline X^3-4X^2+X-2 & \uparrow \text{quotient.} \\ -(X^3-2X^2+4X) & \\ \hline -2X^2-3X-2 & \\ -(-2X^2+4X-8) & \\ \hline -7X+6 \leftarrow \text{reste} & \end{array}$$

Ex 3.5 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\deg P_n = n \times \deg(X-n) = n.$$

Par le cours, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

✓