Ex. 3.4

Comme $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4, il suffit de montrer que la famille $(P_1;P_2;P_3;P_4)$ est libre

(c'est plus facile que de montrer qu'elle est génératrice).

Soit $(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3;\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ tq. $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i P_i=0$.

On a donc

$0=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i P_i(0)=\lambda_1\times 0+\lambda_2\times 0+\lambda_3\times 0+\lambda_4\times(-6)$

donc $\lambda_4=0$.

$0=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i P_i(1)=\lambda_1\times 0+\lambda_2\times 0+\lambda_3\times 2$

donc $\lambda_3=0$.

$0=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i P_i(2)=\lambda_1\times 0+\lambda_2\times(-2)$

donc $\lambda_2=0$ et

$0=\lambda_1 P_1(3)=\lambda_1\times 6$ donc $\lambda_1=0$.

$(P_1;P_2;P_3;P_4)$ est donc libre. C'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Ex. 3.7 :

$P=QP_1$ et $Q=PQ_1$

$\to \deg P=\deg Q+\deg P_1$

$\to \deg Q=\deg P+\deg Q_1$

cas P ou $Q=0$

cas $P\neq 0$ et $Q\neq 0$

Soit $(P;Q)\in\mathbb{R}[X]$ tq. $P\mid Q$ et $Q\mid P$.

1er cas : $P=0$. Alors, comme $P\mid Q$, $Q=0$ et pour tout $k\in\mathbb{R}$, $P=kQ$

2e cas : $Q=0$. Alors, comme $Q\mid P$, $P=0$ et, pour tout $k\in\mathbb{R}$, $P=kQ$.

3ème cas : $P \neq 0$ et $Q \neq 0$.

Il existe $(P_1, Q_1) \in \mathbb{R}[X]^2$ t.q. $P = QP_1$ et $Q = PQ_1$.

Donc $\begin{cases} \deg P = \deg Q + \deg P_1 \\ \deg Q = \deg P + \deg Q_1 \end{cases}$. D'où $\deg P = \deg Q$ et $\deg P_1 = \deg Q_1 = 0$.

Comme $\deg P_1 = 0$, il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. $P_1 = k$. D'où

$P = kQ$.

<u>Algorithme d'Euclide</u> : Soit $(A; B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $\deg A \geq \deg B$. On effectue la suite nécessairement finie de divisions euclidiennes :

$$(*)\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 \\ B = R_1 Q_2 + R_2 \\ R_1 = R_2 Q_3 + R_3 \\ \text{- - - -} \\ R_{n-2} = R_{n-1} Q_n + R_n \end{cases}$$
$$R_{n-1} = R_n Q_{n+1} + \underline{0}$$

Il se trouve que

$$\begin{aligned} PGCD(A; B) &= PGCD(B; R_1) \\ &= PGCD(R_1; R_2) \\ &\text{- - - -} \\ &= PGCD(R_{n-2}; R_{n-1}) \\ &= PGCD(R_{n-1}; R_n) \\ &= \frac{R_n}{\text{coeff. dom. de } R_n} \; !! \end{aligned}$$

De plus, en uti. $(*)$, on peut trouver $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q. $UA + BV = PGCD(A; B)$.

Exemple : $A = X^6 + X^2$ et $B = X^3 + X^2$.

$$
\begin{array}{l|l}
X^6 + X^2 & X^3 + X^2 \\
\hline
-(X^6 + X^5) & X^3 - X^2 + X - 1 \\
-X^5 + X^2 & \\
-(-X^5 - X^4) & \\
X^4 + X^2 & \\
-(X^4 + X^3) & \\
-X^3 + X^2 & \\
-(-X^3 - X^2) & \\
2X^2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
X^3 + X^2 & 2X^2 \\
\hline
-X^3 & \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \\
X^2 & \\
-X^2 & \\
0 &
\end{array}
$$

$A = B(X^3 - X^2 + X - 1) + \overbrace{2X^2}^{R_1}$

$B = R_1\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right) + 0.$

Donc $PGCD(A,B) = X^2$

De plus

$\frac{1}{2}R_1 = A \times \frac{1}{2} - B\,\frac{(X^3 - X^2 + X - 1)}{2}$

$= AU + BV$

avec $U = \frac{1}{2}$ et $V = \frac{-1}{2}(X^3 - X^2 + X - 1)$.

Ex. 3.11

$$
\begin{array}{l|l}
X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1 & X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X - 1 \\
\hline
-(X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X - 1) & 1 \\
4X &
\end{array}
$$

$P = Q \times 1 + \underbrace{4X}_{R_1}$

$$
\begin{array}{l|l}
X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X - 1 & 4X \\
\hline
-X^5 & \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{4}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \\
-X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X - 1 & \\
+X^4 & \\
2X^3 - 2X^2 - 2X - 1 & \\
-2X^2 - 2X - 1 & \\
-2X - 1 & \\
-1 &
\end{array}
$$

$Q = R_1 \times \frac{1}{4}(X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X - 2) \underbrace{-1}_{R_2}$

$R_1 = (-1) \times (-4X) + 0$