Dnc $PGCD(P;Q) = \frac{-1}{-1} = 1$

De plus

$$1 = R_1 \frac{1}{4}(X^4 - X^3 + 2X^2 - 2x - 2) - Q$$

$$= (P-Q) \times \frac{1}{4}(X^4 - X^3 + 2X^2 - 2x - 2) - Q$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}(X^4 - X^3 + 2x^2 - 2x - 2)}_{U} P - \underbrace{\frac{1}{4}(X^4 - X^3 + 2x^2 - 2x + 6)}_{V} Q$$

3.12

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 1 & X^2+1 \\ -(X^3 + X) & X \\ \hline -X+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^2 + 1 & -X+1 \\ -(X^2 - X) & -X-1 \\ \hline X+1 & \\ -(X-1) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -X+1 & 2 \\ -(-X) & -\frac{X}{2} + \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \\ -1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$P = QX + \overbrace{(-X+1)}^{R_1}$$

$$Q = -R_1(X+1) + \overbrace{2}^{R_2}$$

$$R_1 = R_2 \frac{(-X+1)}{2} + 0.$$

Dnc $PGCD(P;Q) = \frac{R_2}{2} = 1$

De plus

$$1 = [Q + R_1(X+1)]\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}(X+1)(P - QX)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - X(X+1))Q + \frac{1}{2}(X+1)P.$$

Bezout

Cas où $Q \mid P$: $PGCD(P;Q) = \frac{Q}{\text{coeff. dom. de } Q}$!!

3.13.

Rappel du cours : $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a

$$P = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \, ,$$ Formule de Taylor.

exemple : $P = X^4$ et $a = 1$. On a

$P' = 4X^3$, $P'' = 12X^2$, $P^{(3)} = 24X$; $P^{(4)} = 24$.

Donc

$$P = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(X-1) + \frac{P''(1)}{2!}(X-1)^2 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(X-1)^4$$

$$= 1 + 4(X-1) + \frac{12}{2}(X-1)^2 + \frac{24}{2\times 3}(X-1)^3 + \frac{24}{2\times 3\times 4}(X-1)^4$$

$$= 1 + 4(X-1) + 6(X-1)^2 + 4(X-1)^3 + (X-1)^4.$$

$$= 1 + 4(X-1) + 6$$

(i). $P = X^4 - 1$. On a $P' = 4X^3$, $P'' = 12X^2$, $P^{(3)} = 24X$, $P^{(4)} = 24$.

Donc, pour $a = 1$,

$$P = 0 + 4(X-1) + 6(X-1)^2 + 4(X-1)^3 + (X-1)^4.$$

$$P = P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(X+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(X+1)^2 + \frac{P^{(3)}(-1)}{3!}(X+1)^3 + \frac{P^{(4)}(-1)}{4!}(X+1)^4$$

$$= 0 - 4(X+1) + 6(X+1)^2 - 4(X+1)^3 + (X-1)^4,$$

(ii) $Q = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$

$Q' = 3X^2 - 10X + 3$

$Q'' = 6X - 10$

$Q^{(3)} = 6$

Donc

$$Q = Q(1) + \frac{Q'(1)}{1!}(X-1) + \frac{Q''(1)}{2!}(X-1)^2 + \frac{Q^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3$$

$$= 8 - 4(X-1) - 2(X-1)^2 + (X-1)^3$$

$$Q = Q(-1) + \frac{Q'(-1)}{1!}(X+1) + \frac{Q''(-1)}{2!}(X+1)^2 + \frac{Q^{(3)}(-1)}{3!}(X+1)^3$$

$$= 0 + 16(X+1) - 8(X+1)^2 + (X+1)^3.$$

✓

Ex. 3.14.

Soit $P_k = (X-a)^k$, $0 \leq k \leq n$.

Comme $\deg P_k = k$, pour $0 \leq k \leq n$, la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, par le cours.

Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Les coordonnées de Q dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont des réels $c_0 ; c_1 ; \ldots ; c_n$ tq.

$$Q = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k,$$

Par Taylor,

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(a)}{k!} P_k.$$

Par unicité de l'écriture dans une base, on a $c_k = \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}$, pour tout $0 \leq k \leq n$.