Ex. 3.15.

On effectue la division euclidienne de P par $\prod_{j=1}^{r}(X-a_j)$. Il existe $(Q;R)\in\mathbb{C}[X]^2$ tq.

$$P=\left[\prod_{j=1}^{r}(X-a_j)\right]Q+R$$

avec $\deg R<r$. Pour $k\in[1;r]\cap\mathbb{N}$,

$$0=P(a_k)=\underbrace{\left[\prod_{j=1}^{r}(a_k-a_j)\right]}_{=0}Q(a_k)+R(a_k)$$

Donc $R(a_k)=0$. R a donc r racines distinctes.

Comme $\deg R<r$, $R=0$, par le cours.

Ex. 3.16.

$(X-1)^2 \mid P_n \iff 1$ est racine $k$ième de P avec $k\geq 2$

$\iff P_n(1)=P_n'(1)=0$

On peut aussi utiliser la formule de Taylor en 1.

On a $P_n=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ donc $P_n'=n(n+1)X^n-n(n+1)X^{n-1}$.

Donc $P_n(1)=n-(n+1)+1=0$ et

$P_n'(1)=n(n+1)-n(n+1)=0$.

Par le cours, $(X-1)^2\mid P_n$.

Alternative : par la formule de Taylor en 1,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \frac{P_n(1)}{0!} + \frac{P_n'(1)}{1!}(X-1) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$$

$$P_n = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^{k-2} \times (X-1)^2$$

$$P_n = (X-1)^2 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^{k-2}.$$

Donc $(X-1)^2 \mid P_n$.

3.17.

(1). (On s'inspire de l'ex. 3.15 puisque P et P' ont 2 racines distinctes).

Par division euclidienne, il existe $(Q_1; R_1; Q_2; R_2) \in \mathbb{R}[X]^4$ t.q.

$$\left.\begin{aligned} P &= (X-a)(X-b)Q_1 + R_1 \\ P' &= (X-a)(X-b)Q_2 + R_2 \end{aligned}\right\} (*)$$

avec $\deg R_1 < 2$ et $\deg R_2 < 2$.

On a

$$R_1(a) = \underbrace{P(a)}_{=0} - (a-a)(a-b)Q_1(a) = 0 \text{ car } P(a)$$

$$R_2(a) = P'(a) - (a-a)(a-b)Q_2(a) = 0$$

car, comme a est racine double de P, $P'(a) = 0$.

De même,

$$R_1(b) = \underbrace{P(b)}_{=0} - (b-a)(b-b)Q_1(b) = 0$$

$$R_2(b) = P'(b) - (b-a)(b-b)Q_2(b) = 0.$$

Donc R_1 (resp. R_2) a deux racines distinctes.

Comme $\deg R_1 < 2$ (resp. $\deg R_2 < 2$),

$R_1 = 0$ (resp. $R_2 = 0$), par le cours.

Par $(*)$, $(X-a)(X-b) \mid P$ et $(X-a)(X-b) \mid P'$.

(2). Par division euclidienne, il existe $(Q;R) \in \mathbb{R}[X]^2$

tq.
$$P = P'Q + R$$
avec $\deg R < \deg P'$.

Par $(*)$, on a

$$R = P - P'Q = (X-a)(X-b)Q_1 - (X-a)(X-b)Q_2 Q$$

$$R = (X-a)(X-b)[Q_1 - Q_2 Q].$$

Donc $(X-a)(X-b) \mid R$.

(3). En faisant la division euclidienne de Q par Q' on trouve le reste

$$R = \frac{25}{24}(-6X^2 - X + 1)$$

59

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2$.

Les racines de R sont donc $\frac{1+5}{-12}$ et $\frac{1-5}{-12}$

soit $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

On vérifie ensuite que

$Q\left(-\frac{1}{2}\right) = Q'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et $Q\left(\frac{1}{3}\right) = Q'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Donc $-\frac{1}{2}$ est une racine k_1 ième de Q avec $k_1 \geqslant 2$

$\frac{1}{3}$ ———— k_2 ———— $k_2 \geqslant 2$,

Comme $\deg Q = 4$, la fact. en irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ de Q est

$$Q = 36\left(X + \frac{1}{2}\right)^2\left(X - \frac{1}{3}\right)^2.$$

Donc $-\frac{1}{2}$ est une racine double de Q,

$1/3$ ————————.