Ex. 3.19.

(– Si l'on connait toutes les racines d'un poly. on peut écrire la factorisation en irréductibles sur $\mathbb{K}[X]$.

– on peut parfois obtenir cette factorisation sans préalablement connaître les racines du poly.)

(i) Les racines de P sont les racines $3^{\text{ièmes}}$ de -1.
Ce sont donc les complexes:

$$a_0 = e^{\frac{i\pi}{3}},\ a_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = -1,\ a_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}.$$

Elles sont $\neq$ et $\deg P = 3$ donc

$$P = \underset{\uparrow \atop \text{coeff dom. de } P}{1} \times (X-a_0)^1 \times (X-a_1)^1 \times (X-a_2)^1.$$

(ii) Les racines de Q sont les racines 4ièmes de -1 donc les:

$$a_0 = e^{\frac{i\pi}{4}},\ a_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}},\ a_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4}\right)} = -a_0$$

$$a_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \times (-1) = -a_1$$

Donc $Q = 1 \times (X-a_0) \times (X-a_1) \times (X+a_0)(X+a_1)$.

Alternative: $Q = X^4 - i^2 = (X^2-i)(X^2+i)$

On cherche les racines carrées de i et $-i$.

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc ses racines carrées sont $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $-e^{\frac{i\pi}{4}}$

$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ——— $e^{-\frac{i\pi}{4}}$ et $-e^{-\frac{i\pi}{4}}$

d'où

$$Q = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{-\frac{i\pi}{4}}\right).$$

(iii) Soit $S = X^2 + X + 1$. On a $\Delta = 1 - 4 = (i\sqrt{3})^2$

donc les racines de S sont $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} =: j$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$

On a $S = (X-j)(X-\bar{j})$ donc

$$R = (X^4)^2 + (X^4)^2 + 1 = (X^4 - j)(X^4 - \bar{j}).$$

Comme $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$, leurs racines

4ièmes sont resp. :

$$a_0 = e^{i\frac{2\pi}{3\times 4}} ; a_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3\times 4} + \frac{2\pi}{4}\right)} ; a_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3\times 4} + \frac{4\pi}{4}\right)} ; a_3 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3\times 4} + \frac{6\pi}{4}\right)}$$

$$b_0 = e^{-i\frac{2\pi}{3\times 4}} ; b_1 = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3\times 4} + \frac{2\pi}{4}\right)} ; b_2 = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3\times 4} + \frac{4\pi}{4}\right)} ; b_3 = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3\times 4} + \frac{6\pi}{4}\right)}.$$

On a $a_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $a_1 = ie^{\frac{i\pi}{6}}$, $a_2 = -e^{\frac{i\pi}{6}}$, $a_3 = -ie^{\frac{i\pi}{6}}$

$b_0 = e^{-\frac{i\pi}{6}}$, $b_1 = ie^{-\frac{i\pi}{6}}$, $b_2 = -e^{-\frac{i\pi}{6}}$, $b_3 = -ie^{-\frac{i\pi}{6}}$

donc

$$R = \underline{1}(X - a_0)(X - ia_0)(X + a_0)(X + ia_0)$$
$$\times (X - b_0)(X - ib_0)(X + b_0)(X + ib_0).$$

3.20. 162

On a $P = X^4+3X^3+4X^2+3X+1$
$$P' = 4X^3+9X^2+8X+3$$

Donc $P(-1) = 1-3+4-3+1 = 0$
$$P'(-1) = -4+9-8+3 = 0$$

donc -1 est une racine d'ordre au moins 2 de P. Donc $(X+1)^2$ divise P.

On effectue la div. eucli. de P par $(X+1)^2 = X^2+2X+1$ (dont le reste doit être 0!) :

$$\begin{array}{l|l}
X^4+3X^3+4X^2+3X+1 & X^2+2X+1 \\
\hline
-(X^4+2X^3+X^2) & X^2+X+1. \\
\quad X^3+3X^2+3X+1 & \\
\quad -(X^3+2X^2+X) & \\
\qquad X^2+2X+1 & \\
\qquad -(X^2+2X+1) & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Donc
$$P = (X+1)^2(X^2+X+1).$$

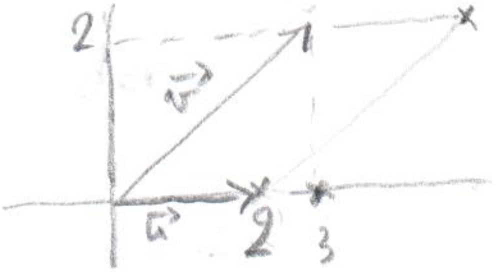
Comme X^2+X+1 est de deg. 2 sans racine réelle ($\Delta = 1-4<0$), c'est la fact. de P en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Comme $X^2+X+1 = (X-j)(X-\bar{j})$, on a
$$P = (X+1)^2(X-j)(X-\bar{j}).$$
C'est la fact. de P en irréd. de $\mathbb{C}[X]$.

Déterminants

- les déterminants permettent de repérer les matrices inversibles.

- il y a un lien entre les déterminants 2×2 et les aires.

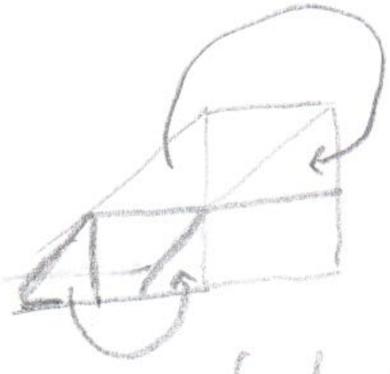
Ex :



$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

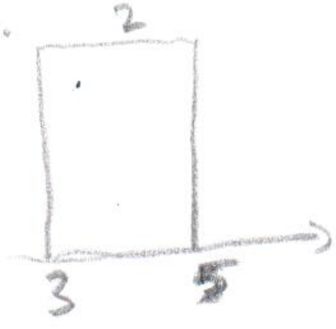
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'aire du parallélogramme est



est l'aire de

c'est-à-dire l'aire de



soit 4.

On a : $$|\det(\vec{u};\vec{v})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = |4| = 4$$

Ex. :

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = -2$

aire$=2 = |\det(\vec{u},\vec{v})|$.

Calcul de déterminants :

A matrice $n \times n$ à coeff. dans $\mathbb{K}$.

<u>$n=1$</u> : $A = (a)$ avec $a \in \mathbb{K}$

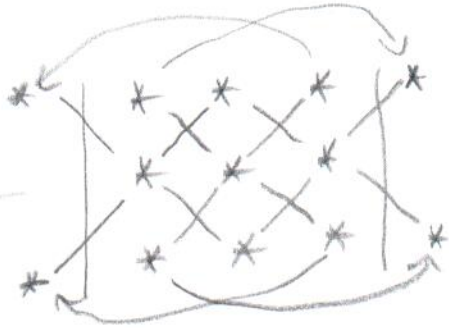
$\det A = a$.

<u>$n=2$</u> : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. $\quad \mathcal{S}_2 = \left\{ id : \begin{matrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \end{matrix} \; ; \; \tau : \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{matrix} \right\}$.

$\varepsilon(id) = 1, \; \varepsilon(\tau) = -1$.

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_2} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}$$
$$= \varepsilon(id)\, a_{11} a_{22} + \varepsilon(\tau)\, a_{21} a_{12}$$
$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

<u>$n=3$</u> :



$\hookrightarrow$ = Somme des produit des diag. descendantes

− (Somme des produits des diag. ascendantes)

<u>exemple</u> :

$$\begin{array}{c} 3 \\ \\ 9 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 7 \end{array} = 1 \times 5 \times 9 + 3 \times 4 \times 8 + 2 \times 6 \times 7 - (3 \times 5 \times 7 + 2 \times 4 \times 9 + 1 \times 6 \times 8).$$

Le cours contient de nombreuses propriétés utiles pour le calcul des déterminants.

65

4.1.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0\times2\times5 + 0\times7\times0 + 4\times5\times5 - (0\times2\times4 + 5\times5\times0 + 5\times7\times0)$$

$$= 4\times5\times5$$

dév. selon une ligne

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\, 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 4\times(5\times5). \checkmark$$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$= 5\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +5\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\times4\times5\times1.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$= 6\times1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\times(15-1).$$