4.3.

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} S & S & S \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

avec $S = 1+a+b+c$.

Donc $$D = S \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= S \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - bL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - cL_1 \end{matrix}$$

$$= S.$$

ou bien

$$D = S\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & b \\ c & 0 & 1+c \end{vmatrix} + \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}}^{=0} \right)$$

$$= S\left(\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & b \\ c & 0 & c \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \right) = S.$$

5.1. Le syst. est équiv. à

$$B \cdot X = Y \quad (*)$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Comme B est inv.,

$$(*) \iff B^{-1}\cdot BX = B^{-1}Y \quad \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$\iff X = B^{-1}\cdot Y = \begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ -9 & 5 & -11\\ -7 & 4 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29\\-62\\-50\end{pmatrix}.$$

5.2.

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

Par le cours, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$. On résoud $AX=Y$

$$AX=Y \iff \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x_1+2x_2 = y_1\\ 3x_1+4x_2 = y_2\end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\iff} \begin{cases}x_1+2x_2=y_1\\ 0-2x_2 = y_2-3y_1\end{cases} \iff \begin{cases}x_1 = y_1+y_2-3y_1\\ x_2 = -\frac{1}{2}(y_2-3y_1)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x_1 = -2y_1+y_2\\ x_2 = -\frac{1}{2}(-3y_1+y_2).\end{cases} \quad \text{donc } A^{-1} =$$

6).
$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 3\end{vmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -1\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_3}{=} (-1)\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix} = -1.$$

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 3 & -12 & 11 \\ -3 & 11 & -10 \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{Com}(A) = -\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -7 & -12 & 11 \\ 6 & 11 & -10 \end{pmatrix}$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Résolution de $AX = Y$.

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 4x_1 + 2x_2 = y_3 - y_1 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$

$$\iff \begin{cases} -11x_1 - 3x_2 = y_1 - 3y_2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 4x_1 + x_2 = y_3 - y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ x_2 + x_3 = y_1 + y_2 - y_3 \\ 4x_1 + x_2 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ x_2 = -y_1 + y_3 - 4(-2y_1 - 3y_2 + 3y_3) \\ x_3 = y_1 + y_2 - y_3 - (7y_1 + 12y_2 - 11y_3) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ x_2 = 7y_1 + 12y_2 - 11y_3 \\ x_3 = -6y_1 - 11y_2 + 10y_3 \end{cases}$$

Donc $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -7 & -12 & 11 \\ 6 & 11 & -10 \end{pmatrix}$.

5.5 -

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{-1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3 \end{matrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par le cours, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_3$.

Par le cours, $\operatorname{rg} A_3 = 2$. Donc A n'est pas inversible.

Rq. : on aurait pu remarquer que les lignes 2 et 3 de A sont liées. Donc $\det A = 0$ donc $\operatorname{rg} A < 3$.

Comme le déterminant extrait de A $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$,

$\operatorname{rg} A \geqslant 2$. D'où $\operatorname{rg} A = 2$.

Donc le rang de $(v_1; v_2; v_3)$ est 2 c'est-à-dire

$\dim \operatorname{vect}(v_1; v_2; v_3) = 2$

V