71

$\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg} A$ par le cours.

Pivot de Gauss pour ${}^tA$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{matrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \end{matrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Donc $\operatorname{rg} A_3 = 2 = \operatorname{rg} {}^tA$.

Pivot de Gauss pour B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ donc $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} B_3 = 3$.

Donc B est inv.

$$\dim \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 3.$$

Calcul de l'inverse de B par le pivot de Gauss.

72

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow -L_2$
$L_3 \leftarrow -L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \leftarrow B^{-1} \; !!$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

?

Pivot de Gauss pour M :

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$ et $L_2 \leftarrow -L_2$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$L_4 \leftarrow \frac{-1}{4} L_4$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{matrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_4,\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4,\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -2 & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{matrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -2 & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{matrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -2 & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{matrix}\right) \leftarrow M^{-1}.$$

5.6.

Pivot de Gauss.

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m^2 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Commodité)}.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - m^2 L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$A_2(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m^3 \\ 0 & m^2-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$A_3(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m^3 \\ 0 & 0 & -\lambda(m) \end{pmatrix}$$

où $\lambda(m) = m-1+m^3-1 = m-1+(m-1)(m^2+m+1)$
$= (m-1)(\underbrace{m^2+m+2}_{>0})$.

Par le cours, $\operatorname{rg} A(m) = \operatorname{rg} A_3(m)$ et $\det A(m) = -\det A_3(m)$

<u>1er cas</u> : $m \notin \{-1;1\}$. On a $1-m^2 \neq 0$ et $\lambda(m) \neq 0$.
Donc $\operatorname{rg} A_3(m) = 3$. D'où $\operatorname{rg} A(m) = 3$ et $A(m)$ est inversible.

<u>2e cas</u> : $m = 1$. Alors $1-m^2 = 0 = \lambda(m) = 1-m^3$
donc $\operatorname{rg} A_3(m) = 1$ et $\operatorname{rg} A(m) = 1$.

3ème cas : $m=-1$.

$$A_3(-1)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&-2\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3+2L_3$

$$A_4(-1)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{rg} A(-1)=\operatorname{rg} A_4(-1)=2$.

On a donc : $\underset{\substack{\Updownarrow \\ (v_1;v_2;v_3)\text{ base.}}}{A(m)\text{ inv.}} \iff \operatorname{rg} A(m)=3 \iff m\notin\{-1;1\}$.

Soit $m\notin\{-1;1\}$. Calcul de $A(m)^{-1}$.

On a

$$\operatorname{Com}(A(m))=\begin{pmatrix}m-1&1-m^3&m^2-1\\1-m^3&m-1&m^2-1\\m^2-1&m^2-1&1-m^4\end{pmatrix}$$

$$\det(A(m))=-\det A_3(m)=-(m^2-1)\lambda(m)$$
$$=-(m-1)^2(m+1)(m^2+m+2)$$

Donc

$$A(m)^{-1}=\frac{1}{-(m-1)^2(m+1)(m^2+m+2)}\begin{pmatrix}m-1&1-m^3&m^2-1\\1-m^3&m-1&m^2-1\\m^2-1&m^2-1&1-m^4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{-1}{(m-1)(m+1)(m^2+m+2)}\begin{pmatrix}1&-(m^2+m+1)&m+1\\-(m^2+m+1)&1&m+1\\m+1&m+1&-(m^3+m^2+m+1)\end{pmatrix}$$