5.7 Dans la base $(1;x;x^2)$,

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(P;Q;R)$.

On a

$$\det A \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{dév.}}{=} (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc A est inversible et $\operatorname{rg} A = 3$. Donc $(P;Q;R)$ est de rang 3 donc génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ car $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.
C'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

<u>Rappel</u> : * Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n et p, respectivement, Soit $f : E \to F$ une appl. liné. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1 ; \dots ; e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1 ; \dots ; f_p)$.

La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E ; \mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{array}$$

dont, pour $1 \leq j \leq n$, la colonne j est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

* Le produit de matrices a été choisi de sorte que, pour $f : E \underset{\text{liné.}}{\to} F$ et $g : F \underset{\text{liné.}}{\to} G$, $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{B}'$ base de F et $\mathcal{B}''$ base de G,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}';\mathcal{B}''}(g) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}'}(f).$$

* Pour $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ deux bases de E, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ est la matrice de l'appl. liné. $id_E : E \to E$ rel. aux bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} = \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}}(id_E) \text{ et } P_{\tilde{\mathcal{B}},\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}})^{-1}.$$

Changement de coordonnées : Soit $(x_1 ; \dots ; x_n)$ et $(\tilde{x}_1 ; \dots ; \tilde{x}_n)$ les coordonnées de $x \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ respectivement.

Alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$.

Pour s'en souvenir et éviter d'écrire $\cancel{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$

on peut considérer $x = \tilde{e}_1$. On a

$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donne la 1ère colonne

de $P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}$ qui est bien constituée des coord. de $\tilde{e}_1$ dans $\mathcal{B}$.

$*$ Soit $f : \begin{matrix} E & \to & F \\ \mathcal{B}_E & & \mathcal{B}_F \\ \mathcal{B}'_E & & \mathcal{B}'_F \end{matrix}$ liné.

Pour se souvenir de la formule de changement de base entre $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E;\mathcal{B}'_F}(f)$

on écrit : $f = id_F \circ f \circ id_E$

$$\begin{tikzcd} (E;\mathcal{B}'_E) \arrow[r, "f", "\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E;\mathcal{B}'_F}(f)"'] \arrow[d, "id_E"'] & (F, \mathcal{B}'_F) \\ (E;\mathcal{B}_E) \arrow[r, "f", "\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f)"'] & (F;\mathcal{B}_F) \arrow[u, "id_F"'] \end{tikzcd}$$

Donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E;\mathcal{B}'_F}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F;\mathcal{B}'_F}(id_F) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E;\mathcal{B}_E}(id_E)$$

$$= P_{\mathcal{B}'_F;\mathcal{B}_F} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}'_E}$$

$$= (P_{\mathcal{B}_F;\mathcal{B}'_F})^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f) \, P_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}'_E}.$$