

Rappel : * Soit E et F deux K -e.v. de dimension finie n et p , respectivement,

soit $f: E \rightarrow F$ une appl. liné. Soit $B_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $B_F = (f_1, \dots, f_p)$.

La matrice de f relativement aux bases B_E et B_F est

$$M_{B_F, B_E}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}_{B_F}$$

dont, pour $1 \leq j \leq n$, la colonne j est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B_F .

* Le produit de matrices a été choisi de sorte que, pour $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ liné. et B base de E , B' base de F et B'' base de G ,

$$M_{B'', B'''}(g \circ f) = M_{B'', B'}(g) \cdot M_{B, B'}(f).$$

* Pour $B, \tilde{B}$ deux bases de E , la matrice de passage de B à $\tilde{B}$ est la matrice de l'appl. liné. $\text{id}_E: E \rightarrow E$ rel. aux bases B et $\tilde{B}$:

$$P_{B, \tilde{B}} = M_{\tilde{B}, B}(\text{id}_E) \text{ et } P_{\tilde{B}, B} = (P_{B, \tilde{B}})^{-1}.$$

Changement de coordonnées : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ et $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ les coordonnées de $x \in E$ dans les bases B et $\tilde{B}$ respectivement.

Alors
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{B, \tilde{B}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Pour s'en souvenir et éviter d'écrire $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = P_{B, \tilde{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on peut considérer $x = \tilde{e}_1$. On a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_{B, \tilde{B}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donne la 1^{ère} colonne}$$

de $P_{B, \tilde{B}}$ qui est bien constituée des coord. de $\tilde{e}_1$ dans B .

* Soit $f: E \rightarrow F$ liné.

$$\begin{matrix} B_E & B_F \\ B'_E & B'_F \end{matrix}$$

Pour se souvenir de la formule de changement de base entre $M_{B_E, B'_F}(f)$ et $M_{B'_E, B'_F}(f)$

on écrit :

$$\begin{array}{ccc} (E, B'_E) & \xrightarrow[M_{B'_E, B'_F}(f)]{f} & (F, B'_F) \\ \text{id}_E \downarrow & & \uparrow \text{id}_F \\ (E, B_E) & \xrightarrow[M_{B_E, B'_F}(f)]{f} & (F, B'_F) \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} M_{B'_E, B'_F}(f) &= M_{B'_F, B'_F}(\text{id}_F) \cdot M_{B_E, B'_F}(f) \cdot M_{B'_E, B_E}(\text{id}_E) \\ &= P_{B'_F, B'_F} \cdot M_{B_E, B'_F}(f) \cdot P_{B'_E, B_E} \\ &= (P_{B'_F, B'_F})^{-1} M_{B_E, B'_F}(f) P_{B'_E, B_E}. \end{aligned}$$

Ex. 6.1.

80

$$\tilde{e}_1 = e_1 + e_2$$

$$\tilde{e}_2 = e_2 + e_3$$

$$\tilde{e}_3 = e_1 + e_3$$

1. Au choix, montrer :
- $\tilde{B}$ est libre
 - $\tilde{B}$ est génératrice
 - $A = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 \end{pmatrix}_{\substack{e_1 \\ e_2 \\ e_3}}$ est inversible ; A a pour $P_{\tilde{B}, B}$.
 - $\text{rg } A = 3$
- Au vu de la 2^e question, on choisit de montrer que A est inversible et on calcule $A^{-1} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}_{\substack{\tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3}}$.

On a

$$\tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = (e_1 + e_2) - (e_2 + e_3) + (e_1 + e_3) = 2e_1$$

$$\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 - \tilde{e}_3 = (e_1 + e_2) + (e_2 + e_3) - (e_1 + e_3) = 2e_2$$

$$-\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = -(e_1 + e_2) + (e_2 + e_3) + (e_1 + e_3) = 2e_3.$$

Dnc :

$$(x) \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2} (\tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3) \\ e_2 = \frac{1}{2} (\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 - \tilde{e}_3) \\ e_3 = \frac{1}{2} (-\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3) \end{cases}$$

On montre que $\tilde{B}$ est une famille génératrice de E.

Soit $x \in E$. Comme B est une base, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq. $x = a e_1 + b e_2 + c e_3$.

Par (x), on a

$$x = \frac{a}{2} (\tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3) + \frac{b}{2} (\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 - \tilde{e}_3) + \frac{c}{2} (-\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3)$$

$$= \frac{1}{2} (a+b-c) \tilde{e}_1 + \frac{1}{2} (-a+b+c) \tilde{e}_2 + \frac{1}{2} (a-b+c) \tilde{e}_3. \quad (**)$$

Dnc $x \in \text{vect}(\tilde{B})$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $\tilde{B}$ est une famille génératrice de E.

Comme $\dim E = 3$ et $\tilde{B}$ a 3 él., (81)
 $\tilde{B}$ est une base de E .

2 - Par définition,

$$P_{\tilde{B}; B} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'après l'énoncé.}$$

De plus

$$P_{\tilde{B}; B} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ par (*)}.$$

3 - D'après (**), les coord. de x dans $\tilde{B}$ sont
 $\left(\frac{1}{2}(a+b-c); \frac{1}{2}(-a+b+c); \frac{1}{2}(a-b+c) \right)$.

4 - Par déf.

$$M_{\tilde{B}; \tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$M_{B; B}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = P_{\tilde{B}; B}.$$

6.2.

$$\begin{aligned} 1). \quad M_{B; \tilde{B}}(f) &= \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =: A \end{aligned}$$

2). On sait que $\text{rg}(f) = \dim f(E)$.

Comme $f(E) \subset F$, $\dim f(E) \leq \dim F = 2$.

Par ailleurs, $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

Comme le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ est un déterminant extrait de A et non nul, $\text{rg}(A) \geq 2$.

Donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$.

3). Par le cours, les coord. de $f(x)$ ds $\mathcal{B}$ sont (y_1, y_2) on

182

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

4). Comme $\dim \text{Ker } f + \dim f(E) = \dim E$
et comme $\dim f(E) = \text{rg}(f) = 2$,

$$\dim \text{Ker } f = \dim E - 2 = 3 - 2 = 1,$$

Rappel : pour se souvenir de la formule
 $\dim \text{Ker } f + \dim f(E) = \dim E$
on peut retenir l'image suivante :

$$E = \text{Ker } f \oplus E' \quad (\text{Somme directe})$$

$$\text{donc } \dim E = \dim \text{Ker } f + \dim E'.$$

De plus, $f|_{E'} : E' \rightarrow f(E)$ est bij.
dnc $\dim E' = \dim f(E)$. ✓

6.3 - $f(e_1) = 3\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2, f(e_2) = 5\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2, f(e_3) = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_3$
 $g(e_1) = \tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2 + \tilde{e}_3, g(e_2) = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2, g(e_3) = \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3.$

1 - $M_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(M_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(f)) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = -7 \neq 0.$$

Dnc f est inversible, par le cours.

2 - $M_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a