

Traçons un exemple simple :

16

résoudre l'éq. (e): $y' = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Notons qu'il s'agit bien d'une éq. diff. du type précédent pour les fonctions continues :

$$a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto 1 \quad / \quad t \mapsto 0 \quad \quad t \mapsto 0.$$

Elle est normale car a ne s'annule pas.

Mieux, elle est même normalisée car a est constante égale à 1 ((e) et (e') sont identiques).

De plus, c'est une éq. sans second memb. car c est nulle. Dnc $S = S_0$.

Il suffit donc d'appliquer le 1^{er} résultat qui dit que

$$S = S_0 = \{ k y_1; k \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{on } y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto e^{-t} = \frac{1}{e^t}$$

car $\mathbb{R} \ni t \mapsto 1$ est une primitive de $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$.

Or a aussi

$$S = \{ k y_0; k \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{on } y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto e^{-0} = 1$$

puisque $\mathbb{R} \ni t \mapsto 0$ est aussi une primitive de $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$.

Rq. : Les deux ensembles $\{ k y_1; k \in \mathbb{R} \}$ et $\{ k y_0; k \in \mathbb{R} \}$ sont bien égaux :

Si $z \in \{ky_1; k \in \mathbb{R}\}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tq. $z = ky_1$ □

Donc $z = k \times \frac{1}{e} \times y_0$ et $z \in \{k'y_0; k' \in \mathbb{R}\}$.

Si $z \in \{k'y_0; k' \in \mathbb{R}\}$, il existe $k' \in \mathbb{R}$ tq. $z = k'y_0$.

Donc $z = k' \times e \times y_1$ et $z \in \{ky_1; k \in \mathbb{R}\}$.

Variante de la résolution par le cours de (e) :

Comme précédemment, on remarque que (e) est une eq. diff. normalisée sans second membre.

La fonction $\mathbb{1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable
 $t \mapsto 1$

et sa dérivée est nulle (cf. S1 ou S2 analyse 2).

Donc $\mathbb{1} \in S$. Par le cours, S est une droite vectorielle

donc, forcément, comme $\mathbb{1}$ n'est pas la fct. nulle,

S est la dte engendrée par $\mathbb{1}$ donc $S = \{k\mathbb{1}; k \in \mathbb{R}\}$.

Résolution sans l'aide du cours (alg. 2).

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une sol. de (e). On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 0$. On a vu au S1 (ce point sera (ré) démontré au S2 en analyse 2) qu'alors y est constante. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tq. $y = k\mathbb{1}$

avec $\mathbb{1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto 1$.

Donc $S \subset \{k\mathbb{1}; k \in \mathbb{R}\}$.

Soit $z \in \{k\mathbb{1}; k \in \mathbb{R}\}$. z est dérivable et sa dérivée

est nulle. Donc $z \in S$. D'où $\{k\mathbb{1}; k \in \mathbb{R}\} \subset S$.

Enfin : $S = \{k\mathbb{1}; k \in \mathbb{R}\}$.

Autre exemple : résoudre sur $\mathbb{R}$ l'éq. [8]

(e) : $y' = 1$.

C'est une éq. normalisée avec second membre.

Elle est associée aux fct. continues:

$$a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto 1, \quad t \mapsto 0, \quad t \mapsto 1.$$

(dans la procédure décrite plus haut, il est inutile de "normaliser" l'éq. Elle l'est déjà)

On considère l'éq. (e₀) : $y' = 0$, qui est l'éq. homogène associée à (e). En utilisant le cours, on résout d'abord (e₀). C'est précisément ce que l'on a fait plus haut, et on a trouvé

$$S_0 = \{k \mathbb{1}; k \in \mathbb{R}\} \quad \text{où} \quad \mathbb{1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto 1.$$

Maintenant, on cherche une sol. (particulière) de (e).

Pour ce faire, on peut utiliser la méthode de "variation de la constante" du cours. (cf. para. 1.1.5).

Mais on peut aussi deviner une solution.

La fonction $y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et sa dérivée est $\mathbb{1}$. Donc y_1 est sol. de (e).

Maintenant, on peut terminer la résolution.

Par le cours, $S = \{y_1 + y; y \in S_0\} = \{y_1 + k\mathbb{1}; k \in \mathbb{R}\}$

$$(e), \quad y' = 2y + 1. \quad \rightarrow \quad y' - 2y = 1 \quad \underline{19}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow (e_0) \rightarrow \text{sol. : primitive du } t \mapsto +2 \\ \rightarrow \text{sol. parti.} \\ \rightarrow \text{sol.} \end{array} \right\}$

$\downarrow$
 $t \mapsto 2t$

$\rightarrow$ dériver ?
 $\rightarrow$ var. des ches.

Soit (e_0) l'éq. homogène associée : $y' - 2y = 0$.

Comme $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $t \mapsto 2$
 on a, par le cours,
 $t \mapsto -2t$

$$S_0 = \{ k y_0 ; k \in \mathbb{R} \} \text{ où } y_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-B(t)} = e^{2t}.$$

Par le cours, $S = \{ z + y ; y \in S_0 \}$

où z est une sol. de (e) .

$\left(\begin{array}{l} \text{on cherche } z \text{ par la méth. de var. des ches} \\ \text{on cherche une sol. } z \text{ sous la forme} \\ z(t) = u(t) y_0(t). \end{array} \right)$

On cherche $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dériv. t.q. $z = u y_0$
 soit sol. de (e) ,

$$z \in S \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = 2z(t) + 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) y_0(t) + \cancel{u(t) y_0'(t)} = 2 \cancel{u(t) y_0(t)} + 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) y_0(t) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = e^{-2t}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{primitive de } t \mapsto e^{-2t} \\ \rightarrow \left(\frac{e^{-2t}}{-2} \right)' = e^{-2t} !! \end{array} \right)$$

Soit $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2t}$ u est dérivable

et, pour $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = e^{-2t}$. Dnc, par l'équiv. précédent, $z = u y_0$ est sol. de (e).

Rq: $z(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \times e^{2t} = -\frac{1}{2}$

On aurait deviné cette sol.

on aurait pu dire:

Soit $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z est dérivable et
 $t \mapsto -\frac{1}{2}$
 pour $t \in \mathbb{R}$, $0 = z'(t)$ et
 $2z(t) + 1 = 2(-\frac{1}{2}) + 1 = -1 + 1 = 0 = z'(t)$.
 Dnc z est sol. de (e).

Traiter les éq. (c), (b) et (a) de l'ex. 1.1.

(f): DM devoir à la maison,
 ↑ ex. 1.1, + ex. 1.5,

Ex. 1.1.: éq. (c): $y' + 2ty = 0$

on résout seulement l'éq.

C'est une éq. normalisée homogène.

$$(e): y' + 2ty = 0 \text{ sur } \underline{\mathbb{R}}.$$

11

$$\left(\begin{array}{l} \text{Pline } t \mapsto -2t ? \\ B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^2 \end{array} \right)$$

Soit $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Elle est dérivable
 $t \mapsto t^2$ de dérivée $t \mapsto 2t$.

Dm, par le cours,

$$S = S_0 = \{ k \times y_0; k \in \mathbb{R} \} \text{ où } y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-B(t)} = e^{-t^2}.$$

Exemple d'eq. non normalisée:

$$(e): e^{-t} y' = y. \quad (\text{normale})$$

$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-t}$ ne s'annule pas.

(e) est équivalente à $(\tilde{e}): y' = \frac{1}{e^{-t}} y = e^t y$,
 (Tq. cours) normalisée et homogène.

"

$$(1+y^2) y' - 2ty = 0$$

BT

$$\Rightarrow y' - \frac{2t}{1+t^2} y = 0$$

!!!