

1 - Soit $\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

dans la base canonique, les coordonnées vérifient l'éq. $x+y+z=0$ donc $\tilde{e}_2 \in P$ et $\tilde{e}_3 \in P$. Vérifions que $(\tilde{e}_2; \tilde{e}_3)$ est une base de P .

Si $\lambda_2 \tilde{e}_2 + \lambda_3 \tilde{e}_3 = 0$, pour $(\lambda_2; \lambda_3) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. $(\tilde{e}_2; \tilde{e}_3)$ est donc libre.

Comme P est de dimension 2, $(\tilde{e}_2; \tilde{e}_3)$ est une base de P .

2 - Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de montrer que $\tilde{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ t.q.

$$\lambda_1 v + \lambda_2 \tilde{e}_2 + \lambda_3 \tilde{e}_3 = 0$$

On a donc

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda_2 = 2\lambda_1$, $\lambda_3 = \lambda_1$ et $\lambda_1 + 2\lambda_1 + \lambda_1 = 0$

d'où $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Une $\tilde{B}$ est libre.

186

3 et 4: Par le cours,

$$\begin{aligned} M_{B, \tilde{B}}(f) &= (P_{\tilde{B}, B})^{-1} M_{\tilde{B}, \tilde{B}}(f) P_{B, \tilde{B}} \\ &= P_{B, \tilde{B}} M_{\tilde{B}, \tilde{B}}(f) (P_{B, \tilde{B}})^{-1}. \end{aligned}$$

On a

$$P_{B, \tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{v} & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}.$$

On détermine $(P_{B, \tilde{B}})^{-1}$: $c_1 \leftarrow c_2 + c_3$

$$\begin{aligned} \det P_{B, \tilde{B}} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dev. 3e ligne}}}{=} 2 \times (-1) \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-1) \times (-2) = 4. \end{aligned}$$

De plus

$$\text{com}(P_{B, \tilde{B}}) = \begin{pmatrix} +1 & -(-2) & +1 \\ -(-1) & +(-2) & -(-1) \\ +1 & -(-2) & +(-3) \end{pmatrix}$$

dne

$$(P_{B, \tilde{B}})^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Dnc

87

$$\begin{aligned}
 M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Set 6: Or a

$$\begin{aligned}
 M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(g) &= P_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} M_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}}(g) (P_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}})^{-1} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$M_{\tilde{B}, \tilde{B}}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas fait

Ex. Suppl. n°2.

1- Soit $(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tq. $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 \mathbb{1}_{[0;2[}(x) + \lambda_2 \mathbb{1}_{[1;2[}(x) = 0.$$

En particulier, pour $x = 1$, $0 + \lambda_2 = 0$ et

pour $x = 0$, $\lambda_1 + 0 = 0$. D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et la famille (e_1, e_2) est libre.

- 2 -
- on peut montrer que $(L(e_1); L(e_2))$ est libre
 - on peut montrer que L est inv. et le cours dit alors qu'elle transforme une base en une base
 - on peut montrer que $M_{\tilde{B}, \tilde{B}}(L)$ est inversible

On a

$$\det(M_{\tilde{B}, \tilde{B}}(L)) = -1 - 1 = -2 \neq 0 \text{ donc } L$$

est inv. Par le cours, L transforme une base de E en une base. Comme B est une base par 1, $\tilde{B}$ en est une aussi. On a :

$\mathbb{L}(e_1) \quad \mathbb{L}(e_2)$

~~40~~
89

$$P_{\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}}}(L).$$

3 - (on doit vérifier que M est bien à val. de E
et qu'elle est liné,)

Soit $f \in E$. Il existe $(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ t.s. $f = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.

Par $x \in \mathbb{R}$,

$$(Mf)(x) = (\lambda_1 \mathbb{1}_{[0;1[}(x) + \lambda_2 \mathbb{1}_{[2;2[}(x)) \mathbb{1}_{[-1;1[}(x)$$

$$= \lambda_1 \mathbb{1}_{[0;1[\cap [-1;1[}(x) + \lambda_2 \mathbb{1}_{[2;2[\cap [-1;1[}(x)$$

$$= \lambda_1 \mathbb{1}_{[0;1[}(x) + 0.$$

$$\text{Donc } Mf = \lambda_1 e_1 \in E.$$

Par $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f = \lambda \lambda_1 e_1 + \lambda \lambda_2 e_2$
donc, par le calcul précédent,

$$M(\lambda f) = \lambda \lambda_1 e_1 = \lambda Mf.$$

Par $g \in E$, il existe $(\mu_1; \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ t.s. $g = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$.

On a, par le calcul précédent,

$$Mg = \mu_1 e_1 \quad \text{et} \quad M(f+g) = (\lambda_1 + \mu_1) e_1$$

$$\text{donc } M(f+g) = M(f) + M(g).$$

M est liné.

R_7 : on aurait pu montrer que l'appl.

$$\hat{M}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$f \mapsto fg$$

est liné', et dire que $M = \hat{M}|_{\mathcal{E}}$
pour montrer que M est liné'.

4- Par le calcul précé, $M(e_1) = e_1$ et $M(e_2) = 0$ donc

$$M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

5- Or a

$$P_{\mathcal{B}; \hat{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $\det P_{\mathcal{B}; \hat{\mathcal{B}}} = -2$ et $\text{com}(P_{\mathcal{B}; \hat{\mathcal{B}}}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc

$$P_{\hat{\mathcal{B}}; \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}; \hat{\mathcal{B}}})^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par le cours

$$M_{\hat{\mathcal{B}}; \hat{\mathcal{B}}}(M) = (P_{\mathcal{B}; \hat{\mathcal{B}}})^{-1} M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(M) P_{\mathcal{B}; \hat{\mathcal{B}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Soit $A = \mathcal{M}_{[1/2, 3/2]}$. On a $\frac{1}{A} \mathcal{M}_{\text{const}} = \mathcal{M}_{[1/2, 3/2]} \notin \mathcal{E}$.

En effet, supposons qu'il existe ~~91~~ 91
 $(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\forall x \in [0; 1] \quad \mathcal{U}_A \mathcal{U}_{[0; 1]} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$
 alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{U}_{[1/2; 1]}(x) = \lambda_1 \mathcal{U}_{[0; 1]} + \lambda_2 \mathcal{U}_{[1; 2]}$$

donc, pour $x=0$, $0 = \lambda_1 + 0$ et pour $x=1$
 $0 = 0 + \lambda_2$. Donc $\mathcal{U}_{[1/2; 1]}$ est nulle, Contr.
 car $\mathcal{U}_{[1/2; 1]}(1/2) = 1$.

Ex. suppl. n° 3 : on admet que les appl. sont linéaires.

1. Comme $\dim E = 4$, il suffit de montrer que
 $\tilde{B}$ est une famille libre. Soit $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) \in \mathbb{R}^4$
 t.q. :

$$\lambda_{11}(E_{11} + E_{22}) + \lambda_{12}E_{12} + \lambda_{21}E_{21} + \lambda_{22}(E_{11} - E_{22}) = 0$$

Donc

$$(\lambda_{11} + \lambda_{22})E_{11} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})E_{22} + \lambda_{12}E_{12} + \lambda_{21}E_{21} = 0.$$

Comme B est une base, elle est libre donc

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{11} - \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{12} = 0 \text{ et } \lambda_{21} = 0$$

Donc $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$. Donc $\tilde{B}$ est libre.

Alternative : on montre que

$$P_{B; \tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix} \text{ est inversible.}$$

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dér. / 4}^{\text{e}} \text{ ligne}} 2 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{dér. / 3}^{\text{e}} \text{ col.}}$

$$= 2 \times (-1) \times 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Donc $P_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}$ est inv. donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base.

Pour déterminer $P_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}$, on peut inverser $P_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}$ par la méth. du Pivot. Ou par la formule avec la Comatrice.

On a $E_{11} = \frac{1}{2}(\tilde{E}_{11} + \tilde{E}_{22})$, $E_{22} = \frac{1}{2}(\tilde{E}_{11} - \tilde{E}_{22})$

$\tilde{E}_{12} = E_{12}$ et $\tilde{E}_{21} = E_{21}$ donc

$$P_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{12} \\ \tilde{E}_{21} \\ \tilde{E}_{22} \end{matrix}$$

2 - $\text{Tr}(\mathcal{E})$ est un s. esp. vect. de $\mathcal{R}$ et $\dim \mathcal{R} = 1$
 2 cas possibles: $\text{Tr}(\mathcal{E}) = \{0\}$ ou $\text{Tr}(\mathcal{E}) = \mathcal{R}$
 Tr n'est pas nulle car $\text{Tr}(I_2) = 2 \neq 0$,
 donc $\text{Tr}(\mathcal{E}) = \mathcal{R}$.

Comme $\text{Tr}(I_2) = 2 \neq 0$, $\text{Tr}(\mathcal{E})$ est un s. esp. de $\dim \geq 1$ de $\mathcal{R}$. Or $\dim \mathcal{R} = 1$ donc $\text{Tr}(\mathcal{E}) = \mathcal{R}$ et $\mathcal{B}_0$ est une base de $\text{Tr}(\mathcal{E})$.

Comme $\dim \text{Ker}(\text{Tr}) + \dim \text{Tr}(\mathcal{E}) = \dim \mathcal{E}$ (par le sous)
 on a $\dim \text{Ker}(\text{Tr}) = 4 - 1 = 3$.

On a $\text{Tr}(E_{12}) = \text{Tr}(E_{21}) = \text{Tr}(E_{11} - E_{22}) = 0$. ~~93~~ 93

Donc $(E_{12}; E_{21}; E_{11} - E_{22})$ est une famille de vect. de $\text{Ker}(\text{Tr})$. On montre qu'elle est libre.

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tq. $aE_{12} + bE_{21} + c(E_{11} - E_{22}) = 0$

On a

$$cE_{11} + aE_{12} + bE_{21} - cE_{22} = 0.$$

Comme B est libre, on en déduit que $a=b=c=0$.

Donc $(E_{12}; E_{21}; E_{11} - E_{22})$ est une famille libre de $\text{Ker}(\text{Tr})$ qui est de dim. 3 donc c'est une base de $\text{Ker}(\text{Tr})$.

On a

$${}_{B_1, B_0}^{Tr} = \begin{pmatrix} \text{Tr}(E_{11}) & \text{Tr}(E_{12}) & \text{Tr}(E_{21}) & \text{Tr}(E_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

3 - Il suffit de vérifier que

$$P_{B_1, B_0} = \begin{pmatrix} E_{11} & A & E_{21} & E_{22} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix} \text{ est inversible.}$$

On a

$$\det(P_{B_1, B_0}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Lr. / Lrcl.} \\ \downarrow \\ = 1 \times (-1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

donc P_{B_1, B_0} est inversible.

4 - Soit $t \in \mathbb{R}$ tq. $f(t) = 0$. Donc $\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $t=0$. Donc $\text{Ker } f = \{0\}$.