# Ex. 1.1.

(b) : C'est une éq. homogène et normalisée.

(On a besoin d'une primitive de $I \ni t \mapsto \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}$

$B(t) = t - \ln t$ convient.)

Soit $B : ]0;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t - \ln t$. B est dérivable et, pour $t > 0$, $B'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$. Par le cours,

$$S = S_0 = \{k y_0 ; k \in \mathbb{R}\} \text{ où } y_0 : ]0;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-B(t)} = t e^{-t}$$

(a) : C'est une équation homogène.
Elle est normale car $\mathbb{R} \ni t \mapsto 1+t^2 \geq 1$ ne s'annule pas. L'éq. est donc équiv. à

$$(\tilde{a}) : \quad y' - \frac{2t}{1+t^2} y = 0.$$

(On a besoin d'une primitive de $t \longmapsto \frac{-2t}{1+t^2}$

$-\ln(1+t^2)$ convient.)

Soit $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto -\ln(1+t^2)$. B est dérivable par composition et, pour $t \in \mathbb{R}$, $B'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \times 2t$.

Par le cours,

$$S = \tilde{S} = \tilde{S}_0 = \{k y_0 ; k \in \mathbb{R}\} \text{ où } y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-B(t)} = 1+t^2.$$

Pour les 3 éq. (c), (b) et (a),
l'ens. des sol. est un esp. vect. de dim. 1.

* On cherche une sol. $y$ de (c) tq. $y(0) = 2$

(le cours nous dit qu'il y en a bien une et qu'elle est unique !)

$ke^{-0^2} = 2 \longrightarrow k = 2.$

La fonct. $y = 2y_0$ (rappel : $y_0 : t \mapsto e^{-t^2}$) est
sol. de (c) et vérifie $y(0) = 2e^0 = 2$.

Par le cours, on sait qu'il n'y en a pas d'autres.

* Pour (b) : condition initiale $y(1) = 0$.
La fonct. $y = 0 \times y_0$ (rappel $y_0(t) = \frac{e^t}{t}$, pour $t > 0$)
est sol. de l'éq. et vérifie $y(1) = 0$.

* Pour (a) : Cond. initiale $y(0) = 1$.
La fonct. $y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \end{array}$ est sol. de l'éq. et
vérifie $y_0(0) = 1$.

Ex. 1.5. : (c), (b) et (a).

(c) : $y' + 2ty = 2t$ sur $\mathbb{R}$.

C'est une éq. normalisée avec second membre.

→ on résout l'éq. homogène associée
→ on cherche une sol. de (c).
→ on donne l'ens. des sol.

L'éq. homogène associée est

$(E_0)$ : $y' + 2ty = 0$.

$\Big\{$ - - - - déjà fait, voir plus haut.

$S_0 = \{ky_0 ; k \in \mathbb{R}\}$ $\left( = \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto k e^{-t^2} \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\} \right)$

où $y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t^2} \end{array}$

Par le cours, $S = \{y_p + y ; y \in S_0\} = \{y_p + ky_0 ; k \in \mathbb{R}\}$

où $y_p$ est une sol. de (E).

(- on peut essayer de deviner une sol. $y_p$.
- on peut aussi utiliser la méthode "de variation de la constante".

en cherchant une sol. constante, on voit que $y_p = \mathbb{1}$ est sol.)

Soit $y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 1 \end{array}$. $y_p$ est dérivable et, pour $t \in \mathbb{R}$,

$y_p'(t) + 2t y_p(t) = 0 + 2t \times 1 = 2t$.

Donc $y_p \in S$.

Résolution de (b) : $y' + \frac{t-1}{t} y = t^2$
sur $I = ]0;+\infty[$.

L'éq. homogène associée est
$(b_0)$ : $y' + \frac{t-1}{t} y = 0$ sur $I$.

... déjà fait, voir plus haut.

$S_0 = \{ k y_0 \,;\, k \in \mathbb{R} \}$ où $y_0 : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t e^{-t} \end{array}$.

Par le cours, $S = \{ y_P + y \,;\, y \in S_0 \}$ où $y_P$ est une sol. de (b).

On cherche $y_P$ sous la forme $u \times y_0$ où $u : I \to \mathbb{R}$ est une funct. dérivable. On a

$y_P = u y_0 \in S \iff \forall t \in I,\ y_P'(t) + \frac{t-1}{t} y_P(t) = t^2$

$\iff \forall t \in I,\ u'(t) y_0(t) + \underbrace{u(t) y_0'(t) + \frac{t-1}{t} u(t) y_0(t)}_{= u(t) \left( \underbrace{y_0'(t) + \frac{t-1}{t} y_0(t)}_{= 0 \text{ car } y_0 \in S_0} \right)} = t^2$

$\iff \forall t \in I,\ u'(t) y_0(t) = t^2$

$\iff \forall t \in I,\ u'(t)\, t e^{-t} = t^2$

$\iff \forall t \in I,\ u'(t) = t e^{t}$. (*) (car $t$ ne s'annule pas sur $I$ !)