On cherche une primitive de $I \ni t \mapsto te^t$.
Pour $t \in I$, on a

$$\int^t ve^v dv = \int^t v\,(e^v)'\,dv \overset{\text{IPP}}{=} \left[ve^v\right]^t - \int^t e^v \times 1\, dv$$
$$= te^t - \int^t e^v dv = te^t - e^t + \text{cte}.$$

Soit $u : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (t-1)e^t \end{array}$.

C'est une primitive de $I \ni t \mapsto te^t$ donc (*) est valide. D'après les équivalences précédentes, $y_p = u y_0$ est sol. de (b).

On a $y_p : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto (t-1)e^t \times te^{-t} = t^2 - t. \end{array}$

Rq. : en cherchant une sol. y_p sous forme d'un poly. du second degré : $y_p(t) = at^2+bt+c$ on aurait pu deviner cette solution :

$$y_p \in S \iff \forall t \in I,\ y_p'(t) + \frac{t-1}{t} y_p(t) = t^2$$
$$\iff \forall t \in I,\ 2at + b + \frac{t-1}{t}(at^2+bt+c) = t^2$$
$$\iff \forall t \in I,\ 2at^2 + bt + at^3 + bt^2 + ct - at^2 - bt - c = t^3$$
$$\iff \left(a = 1 \text{ et } 2a - a + b = 0 \text{ et } b + c - b = 0 \text{ et } c = 0\right)$$
$$\iff (a = 1 \text{ et } b = -1).$$

Donc $y_p : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^2 - t \end{array}$ est sol. de (b).

Résolution de (a) : $(1+t^2)y' - 2ty = 1 - t^2$ sur $\mathbb{R}$. 17

Comme, pour $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 \geq 1 > 0$, l'éq. est équivalente à

$$(\tilde{a}) : \quad y' - \frac{2t}{1+t^2} y = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

L'éq. homogène associée est $(\tilde{a}_0)$: $y' - \frac{2t}{1+t^2} y = 0$.

--- déjà fait, voir plus haut

$$\tilde{S}_0 = \{ k y_0 \,;\, k \in \mathbb{R} \} \text{ où } y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto 1+t^2 \end{array}.$$

Par le cours, $S = \tilde{S} = \{ y_p + y \,;\, y \in \tilde{S}_0 \}$ où y_p est une sol. de $(\tilde{a})$.

On cherche y_p sous la forme $u y_0$ où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable. On a

$$y_p \in S \iff \forall t \in \mathbb{R}, \; u'(t) y_0(t) + \overbrace{u(t) y_0'(t) - \frac{2t}{1+t^2} u(t) y_0(t)}^{=0 \text{ car } y_0 \in \tilde{S}_0} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \; u'(t)(1+t^2) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \; u'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad (*)$$

On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\int^t \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} ds = \int^t \frac{1+s^2 - 2s^2}{(1+s^2)^2} ds$$

$$= \int^t \frac{ds}{1+s^2} - \int^t s \times \frac{2s}{(1+s^2)^2} ds$$

Comme $\frac{d}{dr}\left(\frac{-1}{1+s^2}\right) = \frac{1}{(1+s^2)^2} \times 2s$, on a, par IPP,

$$\int^t \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} ds = \text{Arctan}t - \left(\left[s \frac{-1}{1+s^2} \right]^t - \int^t \frac{-1}{1+s^2} \times 1 \, ds \right)$$

$$= \text{Arctan}t + \frac{t}{1+t^2} - \text{Arctan}t + cte.$$

$$= \frac{t}{1+t^2} + cte.$$

Soit $u : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t}{1+t^2} \end{array}$. Par le calcul précédent,

(*) est valide donc $y_P = u \times y_0$ est sol. de (a).

<u>Rq.</u> : $y_P : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t}{1+t^2} \times (1+t^2) = t. \end{array}$

<u>On aurait pu la deviner en cherchant une sol. poly. de degré 1 :</u>

$y_P(t) = at + b$, $y_P'(t) = a$.

$y_P \in S \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad a - \frac{2t}{1+t^2}(at+b) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad a(1+t^2) - 2at^2 - 2tb = 1 - t^2$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad a - at^2 - 2tb = 1 - t^2 \quad (**)$

Pour $a = 1$ et $b = 0$, (**) est valide donc

$y_P : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t \end{array}$ est sol. de (a).

<u>Résolution de (g)</u> : $ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

C'est une équation homogène <u>non normale</u> car la fonct. $\mathbb{R} \ni t \mapsto t$ s'annule !

Dans ce cas, le cours dit peu de chose.
Il donne seulement un exemple de résolution.
L'idée générale est la suivante ;

- on suppose qu'il y a une sol. et on essaye de la déterminer explicitement.
- On devine l'ens. des sol.
- On montre que l'ens. deviné est bien l'ens. des sol.

Voyons cela sur l'ég. (g).
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une sol. de (g). y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall t \in \mathbb{R}, \; t y'(t) + 2y(t) = 0$.

On remarque que, sur $I_+ =]0;+\infty[$, y est aussi solution de (g) et que $I_+ \ni t \mapsto t$ ne s'annule pas. L'ég. (g) est donc une éq. normale sur I_+. On peut donc la résoudre grâce au cours. Ceci est aussi valable si l'on remplace I_+ par $I_- =]-\infty;0[$.
On va résoudre (g) sur I_+ et I_- et cela donnera des informations sur y. Par le cours, l'ens. des sol. de (g) sur I_+ est $S_0^+ = \{k y_+ ; k \in \mathbb{R}\}$, où $y_+ : \begin{array}{l} I_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{t^2} \end{array}$ et l'ens. des sol de (g) sur I_- est $S_0^- = \{k y_- ; k \in \mathbb{R}\}$ où $y_- : \begin{array}{l} I_- \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 1/t^2 \end{array}$.

Comme y est sol. de (g) sur I_+, il existe $k_+ \in \mathbb{R}$ tq. $y_{|I_+} = k_+ y_+$.
Comme y est sol. de (g) sur I_-, il existe $k_- \in \mathbb{R}$ tq. $y_{|I_-} = k_- y_-$.

(On connait presque y en dehors de 0 ;
$y(t) = \frac{k_+}{t^2}$ si $t>0$ et $y(t) = \frac{k_-}{t^2}$ si $t<0$).

Comme y est dérivable, elle est continue et, en particulier, elle est continue en 0. Donc
$$\lim_{t \underset{<}{\to} 0} y(t) = y(0) = \lim_{t \underset{>}{\to} 0} y(t). \quad (*)$$

Or, pour $t \in I_+$, $y(t) = \frac{k_+}{t^2}$ avec $\lim_{t \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{t^2} = +\infty$
donc k_+ doit être nul. En effet,
si $k_+ > 0$ alors $\lim_{t \underset{>}{\to} 0} y(t) = +\infty$. Contr. avec $(*)$
si $k_+ < 0$ alors $\lim_{t \underset{>}{\to} 0} y(t) = -\infty$. Contr. avec $(*)$.
Pour la m̂. raison $\left(\lim_{t \underset{<}{\to} 0} \frac{1}{y^2} = +\infty \right)$, $k_- = 0$.

Donc y est nulle sur I_+ et I_-. Par $(*)$, $y(0) = 0$. Donc y est <u>nulle</u>.
On vient de montrer que si l'on a une sol. sur $\mathbb{R}$ de (g) alors c'est forcément la fonct. nulle.
Réciproquement, la fonct. nulle est bien dérivable et elle vérifie l'éq. sur $\mathbb{R}$.

On a donc montré que $S = \{0\}$ ← c'est un esp. vect. de dim. 0
fonct. nulle
(on a bien fait les "deux sens" de la résolution). 21

Questions supplémentaires :

Existe-t-il une sol. y de (g) t.q. $y(0) = 0$?

Oui, la fonction nulle et elle est unique.

Existe-t-il une sol. y de (g) t.q. $y(7) = 0$?

Oui, la fonction nulle et elle est unique.

Existe-t-il une sol. de (g) t.q. $y(0) = 3$?

<u>Non</u> car la seule sol. de l'éq. vaut 0 en 0.

(i) : $ty' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$. ✓

Faites la résolution de (i) sur $I_+ =]0;+\infty[$

On trouve $S_0^+ = \{k y_+ ; k \in \mathbb{R}\}$

où $y_+ : \begin{array}{l} I_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^3 \end{array}$

Faites la résolution de (i) sur $I_- =]-\infty; 0[$
