

On trouve $S_0^- = \{k y_-, k \in \mathbb{R}\}$ ou

$$y_- : I_- \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto t^3.$$

(On peut faire les 2 résolutions précédentes en m. temps.)

Soit y une sol. de (A) sur $\mathbb{R}$.

Comme y est sol. de (A) sur $I_\pm$, il existe $k_\pm \in \mathbb{R}$ tq. $y|_{I_\pm} = k_\pm y_\pm$.

on devine l'ens. des sol. :

Comme y est conti. en 0, on doit avoir

$$k_- x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = k_+ x_0$$

d'où $y(0) = 0$ mais pas de

cond. sur k_+ ni k_- .

Comme y est dérivable en 0, on doit avoir

$$k_- x_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{t} = y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{t} = k_+ x_0$$

donc $y'(0) = 0$ est pas de contrainte

sur k_+ ni sur k_- .

$$\text{Soit } E = \left\{ y_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} t \mapsto k_+ t^3, t > 0 \\ t \mapsto k_- t^3, t < 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{array} ; (k_+, k_-) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On devine que $S = E$

Comme y est conti. en 0, on a

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = k_+ x_0 = 0.$$

$$\text{Soit } E = \{ y_{k_+, k_-} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} k_+ t^3 \text{ si } t > 0, \\ k_- t^3 \text{ si } t < 0, \\ 0 \text{ si } t = 0, \end{array} (k_+, k_-) \in \mathbb{R}^2 \} \quad (23)$$

On a montré que $y \in E$ et donc que $S \subset E$.

Soit $(k_+, k_-) \in \mathbb{R}^2$. On vérifie que $y_{k_+, k_-} \in S$.

D'après ce qui précède, y_{k_+, k_-} est sol. de (i) sur I_+ et sur I_- . De plus,

$$\frac{y_{k_+, k_-}(t) - 0}{t} = k_+ t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} 0$$

et, par $t \in I_-$,

$$\frac{y_{k_+, k_-}(t) - 0}{t} = k_- t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{>} 0.$$

Donc y_{k_+, k_-} est dérivable en 0 et $y'_{k_+, k_-}(0) = 0$.

De plus, $0 \times y'_{k_+, k_-}(0) - 3 \times y_{k_+, k_-}(0) = 0 - 0 = 0$.

Donc y_{k_+, k_-} est sol. de (ii) sur $\mathbb{R}$. D'où $y_{k_+, k_-} \in S$ et $E \subset S$.

Conclusion: $S = E$.

Eq. du second ordre à coeff. constants.

124

Reprise du cours : on étudie les eq. d'inconnue

$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Rq : * Une eq. du type $\tilde{a}y'' + \tilde{b}y' + \tilde{c}y = \tilde{g}$

avec $(\tilde{a}; \tilde{b}; \tilde{c}) \in \mathbb{R}^3$ se ramène au

Cas précédent si $\tilde{a} \neq 0$.

Si $\tilde{a} = 0$, c'est une eq. du 1^{er} ordre.

* on appelle ces eq. "eq. diffé. du 2nd ordre

à coeff. constants" car on dérive 2 fois

la fct. inconnue y (2nd ordre) et les facteurs devant l'inconnue sont constants.

* Comme pour les eq. du 1^{er} ordre étudiées plus haut, on associe à cette eq. une eq. homogène : $y'' + ay' + by = 0$.

Rappel du cours et méthode de résolution.

* L'ens. S_0 de l'eq. homogène associée est un esp. vect. de dim. 2, par conséquent on utilise l'eq. caractéristique associée : $z^2 + az + b = 0 \quad (z \in \mathbb{C})$. (*)

3 cas:

→ (*) a deux sol. réelles $r_1 \neq r_2$.

Des fonct. $y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto e^{r_1 t}$ $t \mapsto e^{r_2 t}$

forment une base de S_0 .

→ (*) a une sol. réelle double r .

Des fonct. $y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto e^{rt}$ $t \mapsto t e^{rt}$

forment une base de S_0 .

→ (*) a deux sol. complexes (forcément conjugués)

$r_1 = r + i\theta$ et $r_2 = r - i\theta$.

Des fonct. $y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto e^{rt} \cos(\theta t)$ $t \mapsto e^{rt} \sin(\theta t)$

forment une base de S_0 .

* Le cours donne l'ens. S des sol. de l'éq. totale;

$S = \{ y_p + y; y \in S_0 \}$ où y_p est une sol. de l'éq. totale.

* Pour trouver une telle sol. y_p , il existe une méthode de "variation des constantes", mais elle est hors prog. (voir L2).

Le cours donne des outils pour trouver une telle sol. en fonction de f .

Exemple : (e). $y'' - y = t$ sur $\mathbb{R}$.

26

(e₀): $y'' - y = 0$,

L'éq. caract. associée est

$$Z^2 - 1 = 0.$$

Les racines sont 1 et -1.

Par le cours, le fact.

$$y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^t \quad \text{et} \quad y_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t}$$

forment une base de S_0 .

Par le cours,

$$S = \{y_p + y; y \in S_0 \text{ ou}$$

y_p est une sol. de (e).

(Comme le second membre est

$$t \mapsto t \Rightarrow t = e^{0t} \times t^{\text{poly.}}$$

Comme 0 n'est pas racine de l'éq. caract., on cherche y_p sous la

$$\text{forme} \quad y_p(t) = e^{0t} Q(t)$$

avec Q poly. de $\deg. \leq 1$.

On cherche y_p sous la forme: $y_p(t) = at + b$

avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer, ou $a, b \in \mathbb{R}$,

$$y_p'(t) = a, \quad y_p''(t) = 0.$$

$$y \in S \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 0 - (at + b) = t \Leftrightarrow a = -1 \text{ et } b = 0.$$

$$\text{Dne } y_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -t \text{ est sol. de (e).}$$

Req. : on peut aussi dériver, elle est sol.

ou bien.

on devine que

$$y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^t$$

$$y_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t}$$

sont sol. : De plus, elles sont indépendantes.

$$\text{Si } \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$$

alors S , pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t} = 0$$

$$\text{Comme } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\text{on a m.e. } \lambda_1 = 0.$$

Comme $t \mapsto e^t$ ne s'annule pas, on en déduit que

$$\lambda_2 = 0.$$

Dne (y_1, y_2) est base.

$$\text{Comme } \dim S_0 = 2,$$

(y_1, y_2) est une base de S_0 .